

Appunti per il corso di Progettazione Assistita

Enrico Bertocchi

May 17, 2016

1 Relazioni cinematiche di dipendenza tra gradi di libertà

1.1 Servo-link

Sia dato un sistema di n gradi di libertà (gg.d.l.) δ_i , e siano definite n componenti di azione esterna F_i agenti (compienti lavoro) su tali gg.d.l., e sia definito un sistema di reazioni elastiche associate allo scostamento di tali gg.d.l. dal valore nullo nella forma $-k_{ij}\delta_j$. Siano

$$\underline{K}\underline{\delta} = \underline{F} \quad (1)$$

le equazioni di equilibrio ai vari gg.d.l. .

Si intende definire una relazione cinematica di dipendenza tra un g.d.l. nello specifico δ_j , ed i restanti $\delta_i, i \neq j$, nella forma

$$\delta_j = \sum_{i \neq j} \alpha_{ji} \delta_i + \Delta\delta_j \quad (2)$$

Il termine $\Delta\delta_j$ è stato introdotto per permettere uno scostamento dalla relazione cinematica stessa, e rappresenta uno spostamento *relativo* tra il termine di combinazione lineare e l'effettiva dislocazione del nodo. Tale termine potrà successivamente essere ridotto a valore nullo (o in generale imposto) con le consuete metodologie di vincolamento del grado di libertà.

Tale relazione cinematica imposta è chiamata *servo-link* o *multi-point constraint (MPC)*, ed è tipicamente implementata nei codici in forma omogenea $\Delta\delta_j = 0$.

Se la forma algebrica (2) lega i vari gg.d.l. senza indurre relazioni di subordinazione, l'imposizione della stessa in forma di *assegnazione* sancisce la condizione di dipendenza di δ_j dai restanti. Si dirà in particolare che δ_j è un g.d.l. *dipendente* (o *tied*) mentre i vari $\delta_i, i \neq j$ sono gg.d.l. *indipendenti* (anche detti *retained*¹).

In virtù della (2) sarà quindi possibile scrivere

$$\begin{bmatrix} \delta_1 \\ \vdots \\ \delta_{j-1} \\ \delta_j \\ \delta_{j+1} \\ \vdots \\ \delta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_{j,1} & \cdots & \alpha_{j,j-1} & 1 & \alpha_{j,j+1} & \cdots & \alpha_n \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \vdots \\ \delta_{j-1} \\ \Delta\delta_j \\ \delta_{j+1} \\ \vdots \\ \delta_n \end{bmatrix} \quad (3)$$

ed in forma compatta

$$\underline{\delta} = \underline{L}\underline{\delta}^*, \quad (4)$$

che risulta essere un semplice cambiamento di base/componenti per la descrizione dello stato del sistema ad n gg.d.l..

¹Questa denominazione nasce da un'implementazione alternativa a quella qui descritta che vede un'eliminazione del g.d.l. dipendente con conseguente riduzione del numero delle incognite stesso. I gg.d.l. indipendenti sono invece "mantenuti" da cui la denominazione.

In particolare è possibile introdurre (3) entro (1) ottenendo il cambiamento di incognite

$$\underbrace{\underline{L}^T \underline{K} \underline{L}}_{\underline{K}^*} \delta^* = \underbrace{\underline{L}^T \underline{F}}_{\underline{F}^*} \quad (5)$$

ove la premoltiplicazione di ambo i membri per \underline{L}^T è stata introdotta per mantenere la simmetria del sistema, nonché una coerente definizione di lavoro virtuale delle azioni esterne nella forma

$$\partial \ell = \langle \underline{F}^*, \partial \delta^* \rangle \quad (6)$$

Andando infine ad analizzare in dettaglio il termine noto di (4), risulta in componenti che

$$F_i^* = F_i + \alpha_{ji} F_j, \quad i \neq j; \quad F_j^* = F_j, \quad (7)$$

ossia che la quota di azione esterna originariamente agente sul j -esimo g.d.l., ora reso dipendente, si ripartisce sugli altri gg.d.l. secondo gli stessi coefficienti α_{ji} che definiscono il legame cinematico.

1.2 Servo-link, forma semplificata omogenea

Sia dato un sistema di n gradi di libertà (gg.d.l) δ_i , e siano definite n componenti di azione esterna F_i agenti (compiuti lavoro) su tali gg.d.l., e sia definito un sistema di reazioni elastiche associate allo scostamento di tali gg.d.l. dal valore nullo nella forma $-k_{ij} \delta_j$. Siano

$$\underline{K} \underline{\delta} = \underline{F} \quad (8)$$

le equazioni di equilibrio ai vari gg.d.l. .

Si intende definire una relazione cinematica di dipendenza tra un g.d.l, nello specifico δ_j , ed i restanti $\delta_i, i \neq j$, nella forma

$$\delta_j = \sum_{i \neq j} \alpha_{ji} \delta_i \quad (9)$$

Tale relazione cinematica imposta è chiamata *servo-link* o *multi-point constraint (MPC)*.

Se la forma algebrica (9) lega i vari gg.d.l. senza indurre relazioni di subordinazione, l'imposizione della stessa in forma di *assegnazione* sancisce la condizione di dipendenza di δ_j dai restanti. Si dirà in particolare che δ_j è un g.d.l. *dipendente* (o *tied*) mentre i vari $\delta_i, i \neq j$ sono gg.d.l. *indipendenti* (anche detti *retained*).

In virtù della (9) sarà quindi possibile scrivere

$$\begin{bmatrix} \delta_1 \\ \vdots \\ \delta_{j-1} \\ \delta_j \\ \delta_{j+1} \\ \vdots \\ \delta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_{j,1} & \cdots & \alpha_{j,j-1} & \alpha_{j,j+1} & \cdots & \alpha_{j,n} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \vdots \\ \delta_{j-1} \\ \delta_{j+1} \\ \vdots \\ \delta_n \end{bmatrix} \quad (10)$$

ed in forma compatta

$$\underline{\delta} = \underline{L}\delta^*, \quad (11)$$

Si nota che il sistema ha perso un grado di libertà, essendo la soluzione ristretta al sottospazio dei possibili $\underline{\delta}$ che non violino la condizione (9).

In particolare è possibile introdurre (10) entro (8) ottenendo la forma

$$\underline{K}\underline{L}\delta^* = \underline{F} \quad (12)$$

che tuttavia risulta essere un sistema sovradeterminato di n equazioni nelle $n-1$ incognite δ^* .

La soluzione tipica a questo tipo di problematiche si ottiene interpretando la colonne della matrice \underline{L} come la base di un sottospazio vettoriale entro il quale è vincolata a giacere la soluzione. Definito tale sottospazio è possibile proiettare il residuo del sistema di equazioni entro tale sottospazio e imponendo non l'annullamento del residuo, ma l'annullamento di questa sua proiezione

$$\underline{L}^T (\underline{K}\underline{L}\delta^* - \underline{F}) = 0 \quad (13)$$

Questa imposizione è più debole dell'originaria, e il sistema di equazioni

$$\underbrace{\underline{L}^T \underline{K} \underline{L}}_{\underline{K}^*} \delta^* = \underbrace{\underline{L}^T \underline{F}}_{\underline{F}^*} \quad (14)$$

risulta non più sovradeterminato.

La premoltiplicazione di ambo i membri per \underline{L}^T mantiene inoltre la simmetria del sistema, nonché una coerente definizione di lavoro virtuale delle azioni esterne nella forma

$$\partial \ell = \langle \underline{F}^*, \partial \delta^* \rangle \quad (15)$$

Andando infine ad analizzare in dettaglio il termine noto di (11) trovo che,

$$\underline{F}^* = \underline{L}^T \underline{F} = [\underline{I}] \underline{F} + \underline{\alpha} F_j \quad (16)$$

ove $\underline{\alpha}$ è un vettore colonna che raccoglie i coefficienti α_{ji} nella forma

$$\underline{\alpha} = [\alpha_{j,1} \quad \cdots \quad \alpha_{j,j-1} \quad \alpha_{j,j+1} \quad \cdots \quad \alpha_{j,n}]^T \quad (17)$$

La quota di azione esterna originariamente agente sul j -esimo g.d.l., ora reso dipendente e rimosso dal sistema, si ripartisce sugli altri gg.d.l. secondo gli stessi coefficienti α_{ji} che definiscono il legame cinematico.

Questa ripartizione avviene ad opera delle reazioni vincolari associate alla relazione cinematica imposta, che per definizione sono forze interne e non possono compiere lavoro sul sistema. Risulta infatti che una reazione vincolare interna nella forma

$$\underline{R} = \lambda [\alpha_{j,1} \quad \cdots \quad \alpha_{j,j-1} \quad -1 \quad \alpha_{j,j+1} \quad \cdots \quad \alpha_{j,n}]^T \quad (18)$$

con λ arbitrario compie lavoro (interno) nullo su qualunque deformata del sistema che rispetti il vincolo (9).

1.3 Link di forze/momenti risultanti distribuiti RBE3

Si considera un nodo dipendente C di coordinate x_C, y_C, z_C , detto nodo di controllo (alle forze... altrimenti la definizione è impropria), ed una nuvola di n nodi indipendenti P_i di coordinate x_i, y_i, z_i e con peso relativo q_i .

Si considera applicato al nodo C un sistema di azioni esterne nella forma delle tre componenti di forza U_C, V_C, W_C e nelle tre componenti di momento Ω_C, Φ_C, Ψ_C , riunite nel vettore

$$\underline{F}_C = [U_C \ V_C \ W_C \ \Omega_C \ \Phi_C \ \Psi_C]^T$$

Si definisce un centro di massa G della nuvola di punti, le cui coordinate sono al solito

$$x_G = \frac{\sum_i q_i x_i}{\sum_i q_i}, \quad y_G = \frac{\sum_i q_i y_i}{\sum_i q_i}, \quad z_G = \frac{\sum_i q_i z_i}{\sum_i q_i}. \quad (19)$$

Si suppone inoltre che il sistema di riferimento $Gxyz$ sia **principale d'inerzia** per la distribuzione di pesi; nel caso tale ipotesi non sia verificata occorre procedere come segue:

- cambio di sistema di riferimento da terna xyz ad una terna ausiliaria $\xi\eta\zeta$ con orientazione principale d'inerzia per la specifica distribuzione RBE3;
- applicazione della procedura sotto descritta utilizzando posizioni nodali e componenti di forza/momento scomposte secondo la terna ausiliaria $\xi\eta\zeta$ in luogo della predefinita xyz ;
- trasformazione inversa delle quantità risultanti da terna ausiliaria $\xi\eta\zeta$ a terna originale xyz .

Si definisce quindi una prima relazione di dipendenza cinematica, per cui le rototraslazioni

$$\underline{\delta}_C = [u_C \ v_C \ w_C \ \theta_C \ \phi_C \ \psi_C]^T$$

di C sui tre assi x, y, z sono definite in funzione delle rototraslazioni

$$\underline{\delta}_G = [u_G \ v_G \ w_G \ \theta_G \ \phi_G \ \psi_G]^T$$

del centro di massa G secondo il vincolo di rototraslazione rigida

$$\begin{bmatrix} u_C \\ v_C \\ w_C \\ \theta_C \\ \phi_C \\ \psi_C \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & +(z_C - z_G) & -(y_C - y_G) \\ 0 & 1 & 0 & -(z_C - z_G) & 0 & +(x_C - x_G) \\ 0 & 0 & 1 & +(y_C - y_G) & -(x_C - x_G) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\underline{L}_{CG}} \cdot \begin{bmatrix} u_G \\ v_G \\ w_G \\ \theta_G \\ \phi_G \\ \psi_G \end{bmatrix} \quad (20)$$

già visto per le RBE2.

Come osservato al paragrafo (1.2), all'imposizione di tali relazioni cinematiche è associata una riduzione a nuovo punto di applicazione G delle azioni agenti su C , con l'introduzione di opportuni momenti di trasporto come da

$$\underline{F}_G = [\underline{L}_{CG}]^T \cdot \underline{F}_C, \quad \underline{F}_G = [U_G \ V_G \ W_G \ \Theta_G \ \Phi_G \ \Psi_G]^T \quad (21)$$

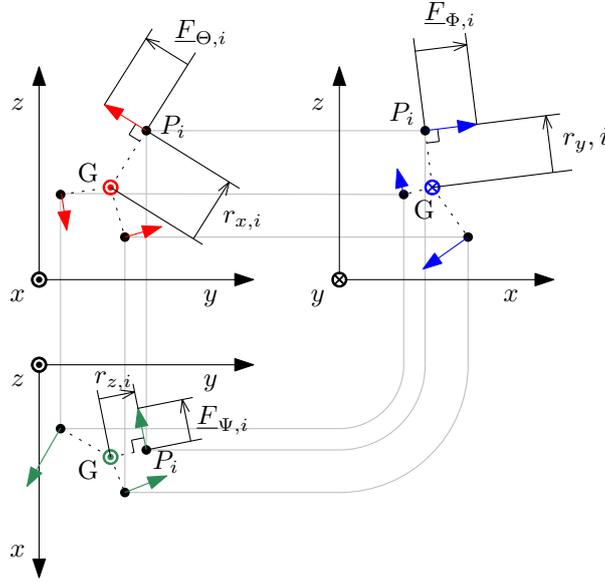


Figure 1: Schema distribuzione momenti

Tale vincolo deriva dall'imposizione di pari lavoro dei sistemi di forze/spostamenti su C e su G

$$\mathcal{L}_C = \delta_C^T \underline{F}_C = (\underline{L}_{CG} \delta_G)^T \underline{F}_C = \delta_G^T \underbrace{\underline{L}_{CG}^T \underline{F}_C}_{\underline{F}_G} = \delta_G^T \underline{F}_G = \mathcal{L}_G \quad (22)$$

Si definisce quindi una seconda relazione di dipendenza per cui da una parte lo spostamento del nodo G risulti la media pesata degli spostamenti ai nodi P_i , ovvero

$$u_G = \frac{\sum_i q_i u_i}{\sum_i q_i}, \quad v_G = \frac{\sum_i q_i v_i}{\sum_i q_i}, \quad w_G = \frac{\sum_i q_i w_i}{\sum_i q_i}, \quad (23)$$

e dall'altra le forze applicate in C e ridotte a G si distribuiscono ai nodi P_i secondo i pesi dati, ossia

$$U'_i = U_G \frac{q_i}{\sum_i q_i}, \quad V'_i = V_G \frac{q_i}{\sum_i q_i}, \quad W'_i = W_G \frac{q_i}{\sum_i q_i}. \quad (24)$$

Per quanto riguarda la distribuzione dei momenti ridotti a G sui nodi P_i , si preferisce operare in termini di una seconda quota di forze nodali U''_i, V''_i, W''_i piuttosto che in termini di quote momento $\Theta'_i, \Phi'_i, \Psi'_i$.

Riferendosi a Figura 1, si considerano le componenti di momento Θ_G, Φ_G, Ψ_G singolarmente nella riduzione a sistemi di forze equivalenti.

Preso l'esempio particolare della componente z di momento Ψ_G , ad essa viene sostituito un sistema equivalente di forze $\underline{F}_{\Psi,i}$ distribuite ai punti P_i in sole componenti x, y tali da avere

- retta d'azione sul piano x, y , normale alla congiungente $G - P_i$ ivi proiettata
- verso coerente con il momento stesso

- modulo proporzionale alla distanza proiettata

$$r_{z,i} = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2}, \quad \Delta x_i = x_i - x_G, \quad \Delta y_i = y_i - y_G \quad (25)$$

e al peso q_i del nodo

- momento risultante della distribuzione pari a $\Psi_G \hat{k}$

In particolare risulta

$$\underline{F}_{\Psi,i} = \frac{\Psi_G q_i}{\sum_j q_j r_{z,j}^2} (-\Delta y_i \hat{i} + \Delta x_i \hat{j}) \quad (26)$$

e, una volta definiti

$$r_{x,i} = \sqrt{\Delta y_i^2 + \Delta z_i^2}, \quad r_{y,i} = \sqrt{\Delta z_i^2 + \Delta x_i^2}, \quad \Delta z_i = z_i - z_G$$

si hanno per le altre componenti di momento le forme

$$\underline{F}_{\Theta,i} = \frac{\Theta_G q_i}{\sum_j q_j r_{z,j}^2} (-\Delta z_i \hat{j} + \Delta y_i \hat{k}), \quad (27)$$

$$\underline{F}_{\Phi,i} = \frac{\Phi_G q_i}{\sum_j q_j r_{y,j}^2} (-\Delta x_i \hat{k} + \Delta z_i \hat{i}) \quad (28)$$

le quali, raccolte per componenti e in notazione più compatta, danno

$$U_i'' \hat{i} + V_i'' \hat{j} + W_i'' \hat{k} = q_i \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\Theta_G}{\sum_j q_j r_{z,j}^2} & \frac{\Phi_G}{\sum_j q_j r_{y,j}^2} & \frac{\Psi_G}{\sum_j q_j r_{z,j}^2} \\ \Delta x_i & \Delta y_i & \Delta z_i \end{vmatrix} \quad (29)$$

I termini in (29) andranno sommati a quelli ricavati in (24), per cui la forza distribuita dal link RBE3 sull' i -esimo nodo risulterà

$$\underline{F}_i = U_i \hat{i} + V_i \hat{j} + W_i \hat{k} = (U_i' + U_i'') \hat{i} + (V_i' + V_i'') \hat{j} + (W_i' + W_i'') \hat{k} \quad (30)$$

o, in forma algebrica

$$\begin{bmatrix} U_i \\ V_i \\ W_i \end{bmatrix} = q_i \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{\sum_j q_j} & 0 & 0 & 0 & +\frac{\Delta z_i}{\sum_j q_j r_{y,j}^2} & -\frac{\Delta y_i}{\sum_j q_j r_{z,j}^2} \\ 0 & \frac{1}{\sum_j q_j} & 0 & -\frac{\Delta z_i}{\sum_j q_j r_{x,j}^2} & 0 & +\frac{\Delta x_i}{\sum_j q_j r_{z,j}^2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sum_j q_j} & +\frac{\Delta y_i}{\sum_j q_j r_{x,j}^2} & -\frac{\Delta x_i}{\sum_j q_j r_{y,j}^2} & 0 \end{bmatrix}}_{\underline{L}_{GP,i}^T} \begin{bmatrix} U_G \\ V_G \\ W_G \\ \Theta_G \\ \Phi_G \\ \Psi_G \end{bmatrix} \quad (31)$$

$$\Theta_i = \Phi_i = \Psi_i = 0 \quad (32)$$

Tale relazione è definita in forma specifica per ogni nodo P_i .

Alla distribuzione di forza appena descritta è associata la forma agli spostamenti

$$\underline{\delta}_G = \underbrace{\left[\underline{L}_{GP,1} \quad \cdots \quad \underline{L}_{GP,i} \quad \cdots \quad \underline{L}_{GP,n} \right]}_{\underline{L}_{GP}} \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ v_n \\ w_n \end{bmatrix}}_{\underline{\delta}_{\mathcal{V}_i}} \quad (33)$$

ove \underline{L}_{GP} è definita per blocchi. Tale forma agli spostamenti definisce il moto del baricentro G in funzione del moto dei punti della distribuzione; a titolo di esempio lo spostamento u_G risulta definito dall'Eq. (33) come

$$u_G = \frac{\sum_i q_i \langle [1, 0, 0], [u_i, v_i, w_i] \rangle}{\sum_i q_i} \quad (34)$$

mentre la rotazione ψ_G risulta definita come

$$\psi_G = \frac{\sum_i q_i \langle [-\Delta y_i, +\Delta x_i, 0], [u_i, v_i, w_i] \rangle}{\sum_i q_i r_{z,i}^2} \quad (35)$$

ove $\langle \cdot, \cdot \rangle$ è il consueto prodotto scalare.

Ambo le forme risultano riconducibili ad una proiezione pesata e normalizzata degli spostamenti dei nodi indipendenti P_i su forme di moto elementari della distribuzione di punti, ad esempio una traslazione x come in (34) o una rotazione (G, z) come in (35).

Ricordando infine la (20) si può infine esprimere per il link RBE3 una condizione cinematica complessiva

$$\underline{\delta}_c = \underline{L}_{CG} \cdot \underline{L}_{GP} \cdot \underline{\delta}_{\mathcal{V}_i} \quad (36)$$

ed una caratteristica di distribuzione delle forze ai nodi P_i

$$\underline{F}_i = \underline{L}_{GP,i}^T \cdot \underline{L}_{CG}^T \cdot \underline{F}_C, \quad i = 1 \dots n. \quad (37)$$

2 Algoritmo Newton-Raphson per sistemi di equazioni nonlineari

2.1 Iterazione base

Consideriamo un sistema lineare di n equazioni

$$\underline{R}(\underline{u}) = \underline{F}(\underline{u}) \quad (38)$$

nelle n componenti incognite del vettore \underline{u} , con

$$\underline{R} : \underline{u} \rightarrow \mathbb{R}^n, \underline{u} \in C \subseteq \mathbb{R}^n$$

$$\underline{F} : \underline{u} \rightarrow \mathbb{R}^n, \underline{u} \in C \subseteq \mathbb{R}^n$$

funzioni vettoriali di variabile vettoriale.

Nel caso specifico della soluzione di sistemi di equazioni derivate dagli equilibri nodali di strutture discretizzate con metodo FEM, ho

\underline{u} : vettore contenente le componenti di spostamento/rotazione nodale dalla configurazione indeformata (incognite);

$\underline{F}(\underline{u})$: vettore contenente le componenti di forza/coppia nodale applicate dall'esterno sul sistema, supposte note per una data configurazione della struttura ²;

$\underline{R}(\underline{u})$: vettore contenente le componenti di azione nodale necessarie a mantenere la struttura in equilibrio nello stato deformativo associato al vettore spostamenti nodali \underline{u} , ovvero vettore contenente le componenti di azione nodale associate (uguali e contrarie) alle reazioni elastiche della struttura costretta in stato deformato. Nel caso particolare di sistema elastico lineare $\underline{R}(\underline{u}) = \underline{K}\underline{u}$, con K matrice di rigidezza.

Si nota che tale interpretazione dei termini dell'equazione 38 è appropriata nel caso le condizioni al contorno siano alle sole forze. Nel caso in cui siano definiti vincoli di spostamento nodale imposto alcune coppie di termini coniugati $R_l(\underline{u}), F_l(\underline{u})$ risulteranno modificate in quanto all'equazione di equilibrio l -esima si sostituisce l'identità cinematica tra spostamenti incognito ed imposto.

Una scrittura alternativa prevede la definizione e l'annullamento di un termine di residuo

$$\underline{r}(\underline{u}) = \underline{0} \quad (39)$$

con

$$\underline{r}(\underline{u}) = \underline{R}(\underline{u}) - \underline{F}(\underline{u}) \quad (40)$$

Tale scrittura permette di riassumere in un unico termine le variazioni in \underline{u} di forze e reazioni elastiche, per cui risulta vantaggioso procedere con tale notazione.

Il metodo N-R è costruito a partire dallo sviluppo in serie di Taylor al primo ordine dell'equazione 39 nell'intorno di un punto di iterato i -esimo \underline{u}^i , ossia

$$\underline{r}(\underline{u}^*) = \underline{r}(\underline{u}^i) + \underline{J}_r(\underline{u}^i) \cdot (\underline{u}^* - \underline{u}^i) + o(\underline{u}^* - \underline{u}^i) = \underline{0}. \quad (41)$$

²la dipendenza delle forze esterne dalla configurazione è stata inserita in questa trattazione per amor di generalità, nonché per includere entro la stessa fenomeni nonlineari specifici quali l'instabilità dei rotori o la pressurizzazione di membrane

In tale espressione³

$$[\underline{J}_r(\underline{u}^i)]_{l,m} = [\underline{J}_r^i]_{l,m} = \left. \frac{\partial r_l}{\partial u_m} \right|_{\underline{u}=\underline{u}^i}, \quad l, m = 1 \dots n \quad (42)$$

è lo Jacobiano della funzione residuo r calcolato al punto \underline{u}^i , mentre \underline{u}^* è la soluzione esatta incognita; data la natura della funzione residuo risulta inoltre

$$\underline{J}_r^i = \underline{J}_R^i - \underline{J}_F^i \quad (43)$$

ove

$$[\underline{J}_R^i]_{l,m} = \left. \frac{\partial R_l}{\partial u_m} \right|_{\underline{u}=\underline{u}^i}, \quad [\underline{J}_F^i]_{l,m} = \left. \frac{\partial F_l}{\partial u_m} \right|_{\underline{u}=\underline{u}^i}, \quad l, m = 1 \dots n \quad (44)$$

Notiamo che nel caso \underline{F} sia costante in \underline{u} si ha

$$\underline{J}_F^i = \underline{0} \Rightarrow \underline{J}_r^i = \underline{J}_R^i \quad (45)$$

Trascurando il termine di ordine superiore, l'identità 41 non risulterà più strettamente verificata; sostituendo tuttavia alla soluzione esatta \underline{u}^* un meno pretenzioso termine di iterato successivo \underline{u}^{i+1} ottengo la forma

$$\underline{J}_r^i(\underline{u}^{i+1} - \underline{u}^i) = -\underline{r}(\underline{u}^i) \quad (46)$$

da cui, supponendo \underline{J}_r^i non singolare⁴

$$\underline{u}^{i+1} = \underline{u}^i - \underline{J}_r^i \backslash \underline{r}(\underline{u}^i). \quad (47)$$

In notazione equivalente, posto

$$\underline{\delta u}^i \equiv \underline{u}^{i+1} - \underline{u}^i, \quad \underline{K}^i \equiv \underline{J}_r^i, \quad \underline{r}^i \equiv \underline{r}(\underline{u}^i), \quad (48)$$

abbiamo l'espressione

$$\underline{\delta u}^i = -\underline{K}^i \backslash \underline{r}^i \quad (49)$$

nella quale è evidenziato il ruolo di matrice di rigidezza *tangente* che \underline{J}_r^i ricopre, in analogia al caso lineare.

Fornito infine un vettore di primo tentativo \underline{u}^0 , la 47 definisce una successione iterativa di termini che *potenzialmente* converge alla soluzione esatta \underline{u}^* .

Dovendo limitare ad un numero finito le iterazioni di 47 o 49, occorre definire dei criteri di convergenza (accettazione risultato, fine iterazione) nella forma di

- Convergenza ai residui: stop iterazione implicato da $\|\underline{r}(\underline{u}^{i+1})\| \leq \epsilon_r$, con ϵ_r errore (assoluto) ammesso ai residui;
- Convergenza alle incognite (“agli spostamenti” nello specifico FEM): stop iterazione implicato da $\|\underline{u}^{i+1} - \underline{u}^i\| = \|\underline{\delta u}^i\| \leq \epsilon_u$, con ϵ_u errore (assoluto) ammesso alle incognite.

³qui utilizzo la notazione per cui $[A]_{i,j}$ è l'elemento alla i -esima riga e j -esima colonna di A

⁴la notazione $\underline{x} = \underline{A} \backslash \underline{b}$ indica la soluzione di un sistema lineare di matrice \underline{A} , vettore termini noti \underline{b} , e l'assegnazione del risultato al vettore delle incognite \underline{x} .

L'implementazione di valori di tolleranza *relativa* per incognite e residui è ovviamente possibile (e in generale auspicabile) una volta individuati opportuni termini di riferimento in valore assoluto per forze e spostamenti.

La determinazione di tali valori di tolleranza ammissibile è un aspetto cruciale dell'analisi nonlineare in quanto la richiesta di una eccessiva precisione aumenta inutilmente i tempi di calcolo, mentre tolleranze molto lasche possono produrre soluzioni inaccurate.

Una possibile implementazione dell'algoritmo Newton-Raphson, iterazione base è riportata come Algorithm 1.

Algorithm 1 Iterato N-R base

Require: \underline{u}^0

Require: $\underline{r}(\underline{u}^i)$ calcolabile $\forall \underline{u}^i$ di iterato

Require: $\underline{\underline{J}}_r(\underline{u}^i)$ calcolabile $\forall \underline{u}^i$ di iterato, e non singolare

$i \leftarrow 0$

while $(\|\underline{r}(\underline{u}^i)\| > \epsilon_F) \vee (i \geq 1 \wedge (\|\underline{u}^i - \underline{u}^{i-1}\| > \epsilon_u))$ **do**

$\underline{\underline{K}}^i \leftarrow \underline{\underline{J}}_r(\underline{u}^i)$

$\underline{r}^i \leftarrow \underline{r}(\underline{u}^i)$

$\underline{\delta u}^i \leftarrow -\underline{\underline{K}}^i \setminus \underline{r}^i$

$\underline{u}^{i+1} \leftarrow \underline{u}^i + \underline{\delta u}^i$

$i \leftarrow i + 1$

end while

$\underline{u}^* \leftarrow \underline{u}^i$

2.2 Caso unidimensionale: algoritmo di Newton e soluzione grafica

blablabla, vedi Figura 2.

2.3 Caso bidimensionale: accenno di soluzione grafica

blablabla, vedi Figura 3a e Figura 3b.

Algorithm 2 Algoritmo N-R per applicazioni strutturali (parziale..)

Require: \underline{u}_0^* in equilibrio con \underline{F}_0 , potenzialmente ambedue = 0

Require: $\underline{R}(\underline{u}_j^i)$ calcolabile $\forall \underline{u}_j^i$ di iterato

Require: $\underline{J}_R(\underline{u}_j^i)$ calcolabile $\forall \underline{u}_j^i$ di iterato, e non singolare

for $j = 1 \rightarrow m$ **do**

$\underline{u}_j^0 \leftarrow \underline{u}_{j-1}^*$

$i \leftarrow 0$

$conv \leftarrow \text{False}$

while $((i \leq imax) \wedge (! conv))$ **do**

$\underline{K}_j^i \leftarrow \underline{J}_R(\underline{u}_j^i)$

$\underline{R}_j^i \leftarrow \underline{R}(\underline{u}_j^i)$

$\underline{\Delta u}_j^i \leftarrow \underline{K}_j^i \setminus (\underline{F}_j - \underline{R}_j^i)$

$\underline{u}_j^{i+1} \leftarrow \underline{u}_j^i + \underline{\Delta u}_j^i$

$i \leftarrow i + 1$

if $(\|\underline{F}_j - \underline{R}(\underline{u}_j^i)\| \leq \epsilon_F) \wedge (\|\underline{u}_j^i - \underline{u}_j^{i-1}\| \leq \epsilon_u)$ **then**

$conv \leftarrow \text{True}$

end if

end while

if $conv = \text{True}$ **then**

$\underline{u}_j^* \leftarrow \underline{u}_j^i$

else

Break.

▷ "Houston, we've had a problem."

end if

end for

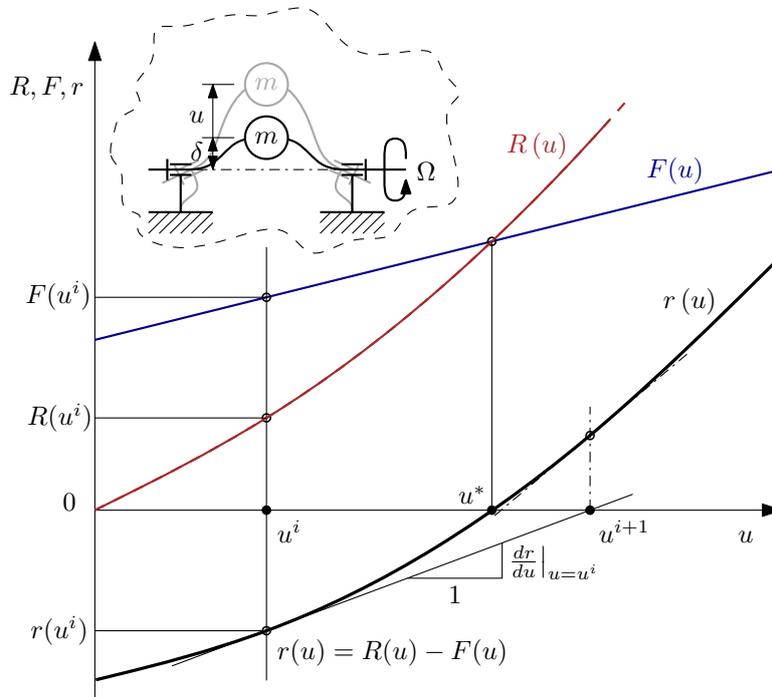


Figure 2: Costruzione grafica per l'iterato N-R, caso N=1

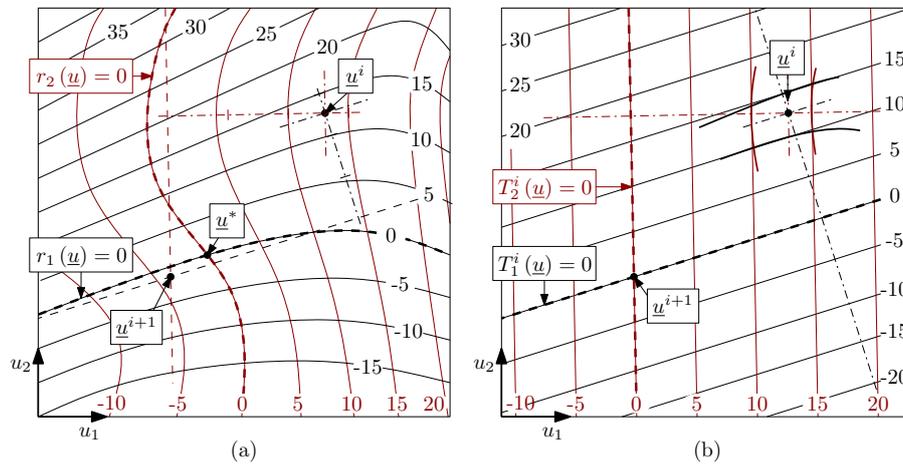


Figure 3: Costruzione grafica per l'iterato N-R, caso $N=2$