deformazioni da spost. virtuale $\boxed{\delta \underline{u}}$

$$\delta \underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{B}} \cdot \delta \underline{u} \qquad \underline{\underline{B}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{L}}} \underbrace{\begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{N}}(x,y)}$$

$$\delta \underline{\varepsilon} = \underbrace{\begin{bmatrix} \delta\varepsilon_x \\ \delta\varepsilon_y \\ \delta\gamma_{xy} \end{bmatrix}}_{\text{in 2d}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \delta\varepsilon_x \\ \delta\varepsilon_y \\ \delta\varepsilon_z \\ \delta\gamma_{xy} \\ \delta\gamma_{yz} \\ \delta\gamma_{zx} \end{bmatrix}}_{\text{in 3d}}$$

tensioni

associate allo stato di equilibrio che vado a perturbare con gli spostamenti virtuali $\delta \underline{u}$

$$\underline{\sigma} = \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}}_{\text{in 2d}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix}}_{\text{in 3d}} = \underline{\underline{D}}\,\underline{\underline{B}}\,\boxed{\underline{u}}$$

I contributi $\delta\underline{\sigma} = \underline{\underline{D}}\,\delta\underline{\varepsilon}$ associati alla deformazione virtuale sono trascurati in quanto danno luogo a termini energetici di ordine superiore.

spostamenti nodali alla config. di equilibrio

variazione di energia potenziale elastica associata agli spost. virtuali $\boxed{\delta \underline{u}}$

$$\delta U = \int_V \delta\underline{\varepsilon}^T \boxed{\underline{\sigma}}\, dV \; \cancel{+ \int_V \delta\underline{\varepsilon}^T \delta\underline{\sigma}\, dV} = \int_V \underbrace{\delta\underline{u}^T \underline{\underline{B}}^T}_{\delta\underline{\varepsilon}^T} \underbrace{\underline{\underline{D}}\,\underline{\underline{B}}\,\underline{u}}_{\underline{\sigma}}\, dV$$

volume dell'elemento

$$(A \cdot B)^T = B^T A^T$$

$$= \delta\underline{u}^T \underbrace{\boxed{\int_V \underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{D}}\, \underline{\underline{B}}\, dV}}_{\underline{\underline{K}}} \underline{u}$$

integrando costante in dV !!

$$\underline{\underline{K}} = a \cdot t \cdot \underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{D}}\, \underline{\underline{B}}$$

Lavoro virtuale delle forze esterne

$$\delta W = \delta\underline{u}^T \underline{F} \qquad = \delta\underline{u}^T \underline{\underline{K}}\, \underline{u}$$

spost. associato alla configurazione di equilibrio

spostamento virtuale perturbante la configuraz. di equilibrio

$$\text{ove} \quad \underline{F} = \begin{bmatrix} P_{1x} \\ P_{1y} \\ P_{2x} \\ P_{2y} \\ P_{3x} \\ P_{3y} \end{bmatrix} + \int_{Sup.} \underline{\underline{N}}^T \begin{bmatrix} s_x \\ s_y \end{bmatrix} dS + \int_V \underline{\underline{N}}^T \begin{bmatrix} q_x \\ q_y \end{bmatrix} dV$$

forze esterne applicate ai nodi

azioni esterne di superficie

azioni esterne di volume

ridotte ai nodi

$$\int_a^b w(x) \cdot f(x)\, dx = \bar{F} \cdot \int_a^b w(x)\, dx$$

$$\left\{ a t \cdot \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right.$$

$$\int_V \underline{\underline{N}}\, dV =$$

principio dei lavori virtuali

- corpo in equilibrio
- spostamenti virtuali
  - arbitrari
  - compatibili con vincoli → compatibili con le funzioni di forma → vincoli cinematici
  - infinitesimi ??

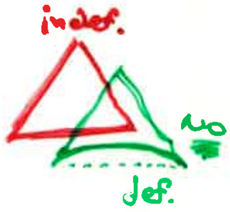
$\left\{ \begin{array}{l} - \text{spostamenti nodali } \underline{u} \\ - \text{forze esterne applicate} \end{array} \right.$ • $\underline{F}$ nodali • $[s_x, s_y]^T$ di superficie • $[q_x, q_y]^T$ di volume

$\underline{\underline{N}}(x,y) \cdot \delta\underline{u}$

- lavoro virtuale delle forze esterne δW

=

-lavoro virtuale delle azioni interne
-variazione di energia potenziale elastica $\Big\} \delta\mathcal{U}$



- $\delta W = \delta\mathcal{U} \Rightarrow \delta\underline{u}^T \underline{F} = \delta\underline{u}^T \underline{\underline{K}}\,\underline{u} \quad \forall\, \delta\underline{u}$

identità tra scalari

$\Downarrow$

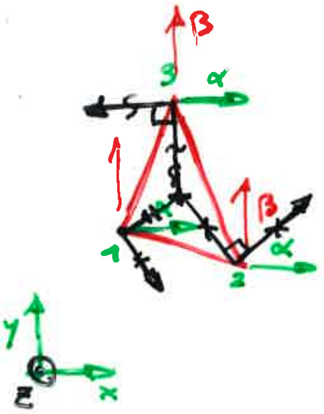
$$\boxed{\underline{F} = \underline{\underline{K}}\,\underline{u}}$$

identità tra vettori

Forze esterne applicate all'elemento

forze da applicarsi ai nodi per equilibrare le reazioni elastiche associate allo spostamento nodale $\underline{u}$, $\boxed{\text{ovvero}}$ da applicarsi ai nodi per mantenere l'elemento in configurazione deformata $\underline{u}$

se uguali ho equilibrio



$\underline{v} = \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \\ \alpha \\ 0 \\ \alpha \\ 0 \end{bmatrix} = t_x$

t_y

6x6 nel tria 3

3 moti di corpo rigido ind.

$6-3=\boxed{3}$

- $\underline{\underline{K}}$ in generale non rango pieno per via dei moti di corpo rigido

$\exists\ \boxed{\underline{v} \neq \underline{\emptyset}}$ (modi di spost. nodale) t.c. $\underline{v}^T \underbrace{\underline{\underline{K}}\,\underline{v}}_{=0} = 0$

se $\underline{v}$ moto di corpo rigido, infatti, è equilibrato da un sistema di forze nulle

- $\underline{\underline{K}}$ semidefinita positiva, ossia $\forall\, \underline{v} \in \mathbb{R}^n$, $\underline{v}^T \underline{\underline{K}}\,\underline{v} = 2\,\mathcal{U} \geq 0$

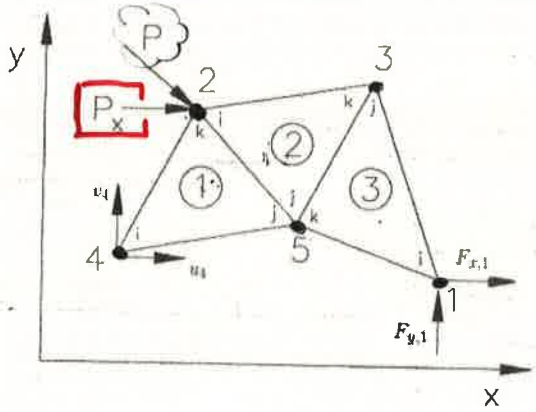
in quanto la condizione indeformata $(\underline{v} = \underline{\emptyset},\ \mathcal{U} = 0)$ è un minimo di energia pot. elastica

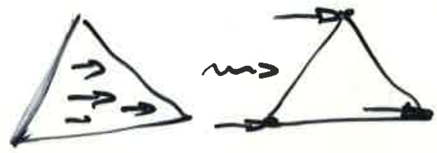
PAOM 8/3/2016
pag. 3

wiki 2015 - cdm.ing.unimo.it

ele 1, nodo i ≡ nodo 4

ele 3, nodo j ≡ nodo 3





ele	i	j	k
1	4	5	2
2	2	5	3
3	1	3	5

$$\boxed{\underline{\delta}_s} = [u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad u_3 \quad v_3 \quad u_4 \quad v_4 \quad u_5 \quad v_5]^T$$

$$\boxed{\underline{F}_s} = [F_{x,1} \quad F_{y,1} \quad F_{x,2} \quad F_{y,2} \quad F_{x,3} \quad F_{y,3} \quad F_{x,4} \quad F_{y,4} \quad F_{x,5} \quad F_{y,5}]$$

$$\boxed{\underline{F}_s = \underline{K}_s \underline{\delta}_s}$$

Matrice di rigidezza elemento 1, espressa come relazione tra forze e spostamenti ai nodi dell'elemento 1. Equivalenza tra numerazione locale e globale $[1i] \equiv 4$, $[1j] \equiv 5$, $[1k] \equiv 2$.

ele ①

U forza in dir x

V forza in dir y

$$\begin{bmatrix} U_{[1i],1} \\ V_{[1i],1} \\ U_{[1j],1} \\ V_{[1j],1} \\ U_{[1k],1} \\ V_{[1k],1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{[1i]} \\ v_{[1i]} \\ u_{[1j]} \\ v_{[1j]} \\ u_{[1k]} \\ v_{[1k]} \end{bmatrix} \begin{matrix} u_4 \\ v_4 \\ u_5 \\ v_5 \\ u_2 \\ v_2 \end{matrix}$$

$\underline{u}$ ①

Matrice di rigidezza elemento 2. Equivalenza tra numerazione locale e globale $[1i] \equiv 2$, $[1j] \equiv 5$, $[1k] \equiv 3$.

$- U_{2,1}$

nodo secondo num. globale

$$\begin{bmatrix} U_{[2i],2} \\ V_{[2i],2} \\ U_{[2j],2} \\ V_{[2j],2} \\ U_{[2k],2} \\ V_{[2k],2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{15} & b_{16} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} & b_{25} & b_{26} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} & b_{35} & b_{36} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} & b_{45} & b_{46} \\ b_{51} & b_{52} & b_{53} & b_{54} & b_{55} & b_{56} \\ b_{61} & b_{62} & b_{63} & b_{64} & b_{65} & b_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{[2i]} \\ v_{[2i]} \\ u_{[2j]} \\ v_{[2j]} \\ u_{[2k]} \\ v_{[2k]} \end{bmatrix}$$

Matrice di rigidezza elemento 3. Equivalenza tra numerazione locale e globale $[1i] \equiv 1$, $[1j] \equiv 3$, $[1k] \equiv 5$.

ele ②

$- U_{2,2}$

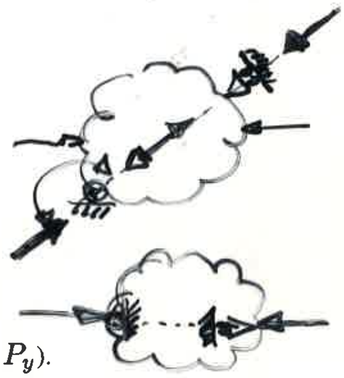
nodo ele

$$P_x - U_{2,1} - U_{2,2} = 0$$

ele 3

PAOM 8/3/2016 pag. 4

$$\begin{bmatrix} U_{[3i],3} \\ V_{[3i],3} \\ U_{[3j],3} \\ V_{[3j],3} \\ U_{[3k],3} \\ V_{[3k],3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & c_{55} & c_{56} \\ c_{61} & c_{62} & c_{63} & c_{64} & c_{65} & c_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{[3i]} \\ v_{[3i]} \\ u_{[3j]} \\ v_{[3j]} \\ u_{[3k]} \\ v_{[3k]} \end{bmatrix}$$



Esempio di equazione di equilibrio nodale

Equazione di equilibrio alla traslazione in direzione x del nodo 2.

Si suppone che sul nodo 2 agisca una forza esterna nodale P, scomponibile in due componenti (P_x, P_y).

Sullo stesso nodo agiscono le reazioni elastiche degli elementi triangolari 1 e 2 deformati secondo spostamento $\underline{\delta}$, denominate rispettivamente con $-U_{2,1}$ e $-U_{2,2}$, in cui il primo indice si riferisce al nodo mentre il secondo indica l'elemento.

Equivalentemente, chiamiamo $U_{2,1}$ e $U_{2,2}$ le azioni in direzione x applicate al nodo 2 (primo indice a pedice) necessarie per mantenere rispettivamente gli elementi 1 e 2 (secondo indice a pedice) in configurazione deformata secondo il vettore degli spostamenti nodali di struttura δ.

L'equazione di equilibrio è $\boxed{P_x = U_{2,1} + U_{2,2}}$ dove:

manca U_3, V_3

$U_{2,1}=a_{5,1}u_4 + a_{5,2}v_4 + a_{5,3}u_5 + a_{5,4}v_5 + a_{5,5}u_2 + a_{5,6}v_2$

manca U_1 V_1

$U_{2,2}=b_{1,1}u_2 + b_{1,2}v_2 + b_{1,5}u_3 + b_{1,6}v_3 + b_{1,3}u_5 + b_{1,4}v_5$

manca U_4, V_4

Si può notare che passando dal singolo elemento alla struttura, la matrice quadrata delle rigidezze aumenta la propria dimensione, da 6x6 a 10x10, a causa della presenza dei 5 nodi della struttura globale. Le espressioni $U_{2,1}$ e $U_{2,2}$ risultano essere:

$$U_{2,1}=\underbrace{0 + 0}_{\cdot u_3\ \cdot v_3} + a_{5,1}u_4 + a_{5,2}v_4 + \underbrace{0 + 0}_{\cdot u_1\ \cdot v_1} + a_{5,3}u_5 + a_{5,4}v_5 + a_{5,5}u_2 + a_{5,6}v_2$$

$$U_{2,2}=\underbrace{0 + 0}_{u_1\ v_1} + b_{1,1}u_2 + b_{1,2}v_2 + b_{1,5}u_3 + b_{1,6}v_3 + \underbrace{0 + 0}_{v_4\ u_4} + b_{1,3}u_5 + b_{1,4}v_5$$

$$\begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ U_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \boxed{a_{5,5}+b_{1,1}} & a_{5,6}+b_{1,2} & b_{1,5} & b_{1,6} & a_{5,1} & a_{5,2} & a_{5,3}+b_{1,3} & a_{5,4}+b_{1,4} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \\ u_5 \\ v_5 \end{bmatrix}$$

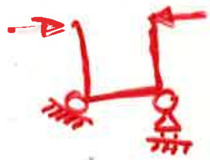
$P_x \equiv U_2$

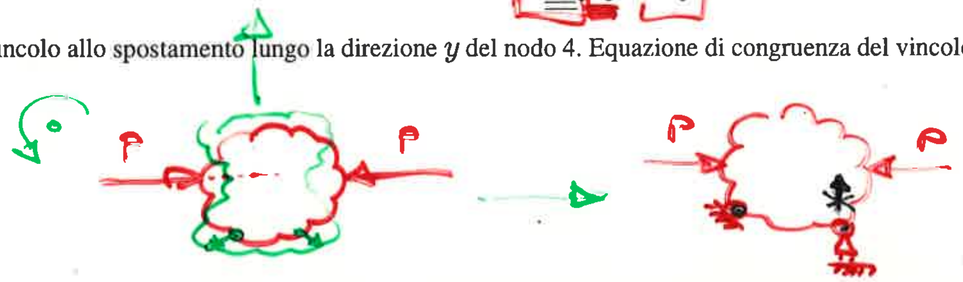
Vincolamenti

nsn

$$\boxed{\underline{\underline{K}}_s}\,\delta_s = \boxed{F_s}$$

Vincolo allo spostamento lungo la direzione y del nodo 4. Equazione di congruenza del vincolo $V_4 = c$.





paom 8/3/2016
pag. 6

$$
\begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ c \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \square_1 & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \square_2 & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \square_3 & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \square_4 & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \square_5 & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \square_6 & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \square_7 & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \square_9 & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \square_{10} & \cdot & \cdot
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \\ u_5 \\ v_5 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ c \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}
- c \cdot
\begin{bmatrix} \square_1 \\ \square_2 \\ \square_3 \\ \square_4 \\ \square_5 \\ \square_6 \\ \square_7 \\ 0 \\ \square_9 \\ \square_{10} \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \cdot & \cdot
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \\ u_5 \\ v_5 \end{bmatrix}
$$

wikipaom2016/assemb_vinc.txt · Ultima modifica: 2016/03/07 22:32 da ebertocchi

risolvo $\underline{\underline{K}}_{s,v}\,\underline{\delta}_s = \underline{F}_{s,v}$, $\underline{\underline{K}}_{s,v}$ e $\underline{F}_{s,v}$ modificati dall'applicaz. dei vincoli

e ottengo $\underline{\delta}_s^*$ soluzione del sistema.

Affianco le reazioni vincolari alle forze esterne e ottengo

$$\underline{\underline{K}}_s \cdot \underline{\delta}_s^* = \underline{F}_s + \boxed{\underline{R}}$$

vettore reazioni vincolari

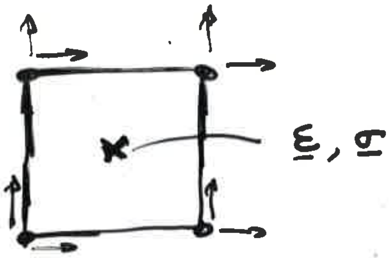
pre-vincolamento

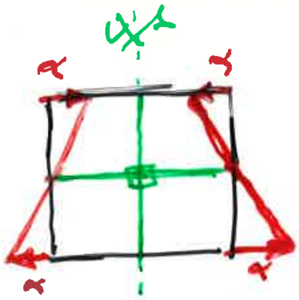
da cui ricavo

$$\underline{R} = \underline{\underline{K}}_s \cdot \underline{\delta}^* - \underline{F}_s$$

ossia le reazioni vincolari assorbono ogni disequilibrio,
anche sui gdl NON vincolati !!

in questo caso assorbono l'errore numerico

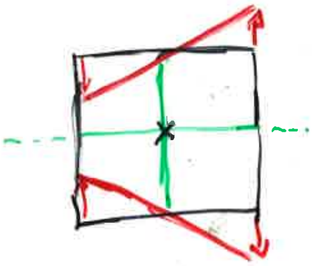




$\varepsilon_x = 0$

$\varepsilon_y = 0$

$\gamma_{xy} = 0$



8 gdl nodali $\rightarrow \underline{\underline{K}} \in M_{8\times 8}$

rango massimo ipotetico 8

- 3 moti corpo rigido
- 2 moti a en. pot. elastica stranamente nulla