Considero un elemento a 4 nodi e definisco un sisema di riferimento globale OXYZ.

OXYZ=spazio di modello non correlato allo specifico elemento.

In questo sistema di riferimento definisco le coordinate dei miei nodi. Inoltre per ogni elemento posso definire i nodi in un sistema di riferimento locale ed associarli univocamente a quelli definiti nel sistema di riferimento globale.

Per esempio:

e138n1=g39 (il nodo 1 dell'lemento 138 corrisponde al nodo globale 39)

NEL MARC: questo accoppiamento tra numerazione globale e locale ha una controparte nel modo in cui i modelli vengono descritti quando vengono passati al solutore o vengono salvati sul disco.

infatti nel fil .dat troviamo 2 file di imput a livello di geometria:

1- COORDINATES

in cui vengono definite le coordinate di ogni nodo;

2-CONNETTIVITY

in questa sezione sono collegati gli elementi ai nodi;

Dopo aver definito nodi e connettività elemento-nodo ho descritto completamente la mesh della mia struttura, in quanto dalle coordinate nodali per interpolazione derivo le coordinate di qualsiasi punto interno.

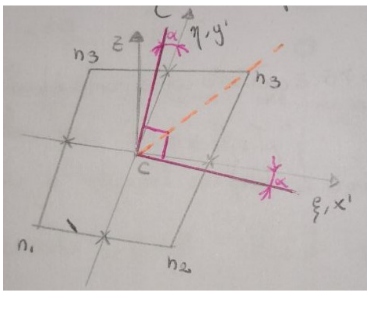
il centroide C ha coordinate $\xi = 0$, $\eta = 0$ per trovare la sua coordinata Z uso la formula di interpolazione $Z = \sum_i N_i(\emptyset, \emptyset) z_i$, con la quale posso trovare anche tutti gli spostamenti e le rotazioni.

per il nostro elemento a quattro nodi posso interpolare gli spostamenti nodali e ottenere gli spostamenti in un punto qualsiasi dell' elemento attraverso la relazione:

$$\begin{bmatrix} u(\xi,\eta) \\ v(\xi,\eta) \\ w(\xi,\eta) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{4} N_i(\xi,\eta) \begin{bmatrix} u(i) \\ v(i) \\ w(i) \end{bmatrix}$$

noi vogliamo agganciarci ad una teoria della piastra che vuole un sistema di riferimento tale da evidenziare uno degli assi normali alla superficie. In particolare ci focalizziamo sul sistema locale Cxyz.

DEFINISCO UN SISTEMA DI RIFERIMENTO LOCALE(usando il metodo che usa marc)

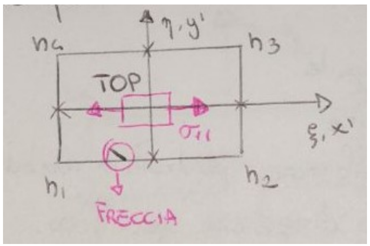


- prendo il mio elemento ed isolo il centroide
- trovo le immagini nello spazio fisico dell' asse ξ ed η, per farlo prendo i punti medi dei lati $\overline{12}$ e $\overline{43}$ unendoli ottengo la direzione dell' asse η e la stessa cosa faccio con i lati $\overline{14}$ e $\overline{23}$ ottenendo la direzione dell' asse ξ.

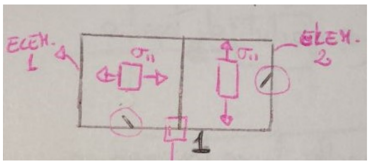
Per via della deformazione dell' elemento l'angolo tra ξ ed η non è di 90°, in questo caso

- fisso x' e y' di primo tentativo e li uso per trovare un vettore normale ad entrambi che sarà il mio asse z.
- segno la bisettrice dell' angolo tra x' e y' e ruoto questi due assi rispetto alla bisettrice di 2 angoli α in modo da mantenere immutata la bisettrice e riuscire ad ottenere un angolo di 90° tra i 2 assi.

ORIENTAZIONE DEI NODI DELL'ELEMENTO Nel marc nel mio elemento ho dei lati



marcati con una freccia, questo mi definisce l' orientazione dei nodi del mio elemento, inoltre se l' il verso della freccia è antiorario sto guardando la faccia TOP del mio elemento.



Nel caso in cui ho 2 elementi con frecce su lati diversi(lo fa in automatico sul marc), quando vado ad analizzare una componente di tensione, ad esempio la σ_{11}, questa sarà orientata diversamente nei 2 elementi. Questo comporta che nel punto 1 non possiamo sommare o fare una media perchè ci troviamo di fronte a due quantità diverse(una componente verticale e una orizzontale).

Per risolvere questo problema bisoga impostare un PREFERRED SYSTEM, ovvero un sistema di riferimento ottimale per l' analisi del singolo materiale. e lo faccio impostando una finta ortotropia e quindi definendo 3 direzioni locali uguali per ogni elemento.

INTERPOLAZIONE DI COMPONENTI DI SPOSTAMENTO E ROTAZIONE ALL' INTERNO DELL' ELEMENTO

Definisco i vettori

$$\underline{u} = \begin{bmatrix} \vdots \\ u_i \\ \vdots \end{bmatrix} \; \underline{v} = \begin{bmatrix} \vdots \\ v_i \\ \vdots \end{bmatrix} \; \underline{w} = \begin{bmatrix} \vdots \\ w_i \\ \vdots \end{bmatrix} \; \underline{\theta} = \begin{bmatrix} \vdots \\ \theta_i \\ \vdots \end{bmatrix} \; \underline{\varphi} = \begin{bmatrix} \vdots \\ \varphi_i \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Combino le relazioni delle 4 derivate di u e v rispetto a x e y in modo da ottenere una forma univoca compattata in un unica espressione matriciale:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}}_{\frac{\partial u}{\partial *}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{\underline{\nabla}}(\xi,\eta) & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{\nabla}}(\xi,\eta) \end{bmatrix}}_{Q} \begin{bmatrix} \underline{U} \\ \underline{V} \end{bmatrix}$$

Q è una matrice a blocchi che posso vedere come $Q = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$, mentre $\underline{U} e \underline{V}$ sono i 2 vettori che rappresentano le 8 componenti i spostamento, in questo modo posso scrivere la relazione:

$$\frac{\partial u}{\partial *} = \underline{\underline{A}}\underline{U} + \underline{\underline{B}}\underline{V}$$

Se invece voglio derivare le rotazioni $\theta e \varphi$ in x ed y :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \theta}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{bmatrix} = \underline{\underline{Q}}(\xi, \eta) \begin{bmatrix} \underline{\Theta} \\ \underline{\Phi} \end{bmatrix}$$

In questa relazione la matrice $\underline{\underline{Q}}(\xi, \eta)$ è la stessa definita per gli spostamenti, mentre $\underline{\Theta}$ e $\underline{\Phi}$ sono i vettori che rappresentano le 8 rotazioni.

RIPRENDIAMO LA TEORIA DELLA PIASTRA

Le derivate degli spostamenti combinate con la matrice $\underline{\underline{H'}}$ mi fanno ottenere le deformazioni sul piano di rifermento che sono quelle membranali.

$$\begin{bmatrix} \overline{\varepsilon_x} \\ \overline{\varepsilon_y} \\ \overline{\gamma_{xy}} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{H'} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} = \underline{\underline{H'}}\underline{\underline{Q}}(\xi, \eta) \begin{bmatrix} \underline{U} \\ \underline{V} \end{bmatrix}$$

Per trovare la curvatura bisogna comporre la matrice $\underline{\underline{H''}}$ in modo da metterla in relazione con $\underline{\Theta}$ e $\underline{\Phi}$ quindi otteniamo:

$$\begin{bmatrix} \overline{k_x} \\ \overline{k_y} \\ \overline{k_{xy}} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} o & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{H''} \begin{bmatrix} \frac{\partial \theta}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{bmatrix} = \underline{\underline{H''}}\underline{\underline{Q}}(\xi, \eta) \begin{bmatrix} \underline{\Theta} \\ \underline{\Phi} \end{bmatrix}$$

con queste relazioni ho trovato deformazioni e curvature in funzione rispettivamente di spostamenti e rotazioni al piano medio.

Se voglio $\begin{bmatrix} \overline{\varepsilon_x} \\ \overline{\varepsilon_y} \\ \overline{\gamma_{xy}} \end{bmatrix}$ in un punto qualsiasi dello spessore della piastra, posso vederlo come la deformazione al piano di riferimento più lo spessore per le curvature:

$$\underline{\varepsilon_x}(\xi, \eta, z) = \underline{\varepsilon_x}(\xi, \eta) + z\underline{k}(\xi, \eta)$$

sostituendo in questa relazione le espressioni di k ed ε trovate prima ottengo:

$$\underline{\varepsilon_x}(\xi, \eta, z) = \begin{bmatrix} \underline{\underline{H'}}\underline{\underline{Q}}(\xi, \eta) & \underline{\underline{0}} & z\underline{\underline{H''}}\underline{\underline{Q}}(\xi, \eta) \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{U} \\ \underline{V} \\ \underline{W} \\ \underline{\Theta} \\ \underline{\Phi} \end{bmatrix}}_{\underline{d}}$$

Nella matrice che moltiplica $\underline{d}$ troviamo un termine costante in z ed un lineare in z che indico rispettivamente come

$$\underline{\underline{B_0}} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{H'}}\underline{\underline{Q}}(\xi, \eta) & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} \end{bmatrix}$$

e

$$\underline{\underline{B_1}} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{H''Q}}(\xi,\eta) \end{bmatrix}$$

andando a sostituire questi termini ottengo:

$$\underline{\varepsilon}(xi,\eta,z) = \begin{bmatrix} \underbrace{\underline{\underline{B_0}}(\xi,\eta)}_{*1} & \underbrace{\underline{\underline{0}}}_{*2} & \underbrace{z\underline{\underline{B_1}}(\xi,\eta)}_{*3} \end{bmatrix} \underline{d}$$

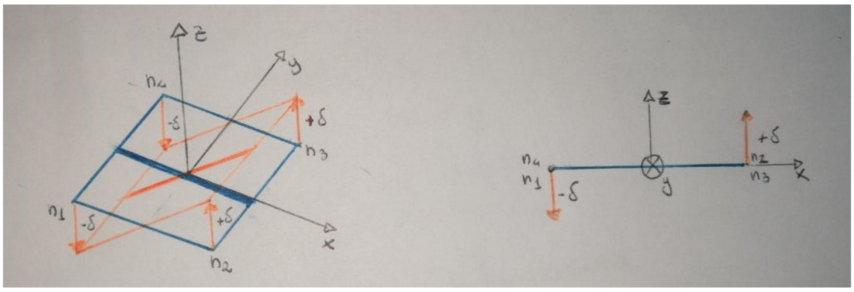
*1 e *3= matrice 3 righe 8 colonne

*2= 4 colonne, Termine che definisce l' influenza degli spostamenti w normali al piano sugli ε entro piano, infatti questa influenza è nulla.

$\underline{d}$= spostamenti generalizzati dell' elemento.

In queste relazioni sto trascurando il moto di drilling

DEFORMAZIONI FUORI PIANO



Prendo un generico elemento piastra e applico uno spostamento per ogni nodo, in particolare:

$$w_1 = w_4 = -\delta$$

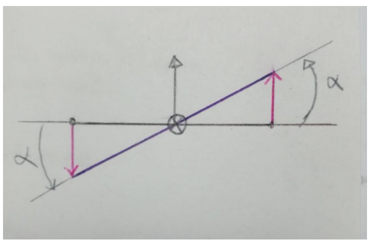
e

$$w_3 = w_3 = \delta$$

.

Voglio trovare come si allunga la fibra in direzione x, quindi voglio trovare la componente di deformazione ϵ_x. Per trovare la fibra deformata basta sommare lo spostamento alla coordinata originaria.

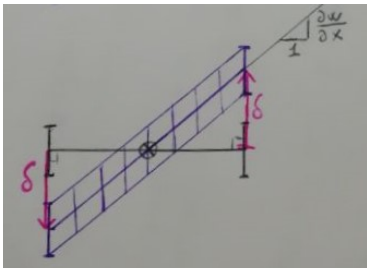
Siccome le uniche componenti di spostamento che abbiamo sono fuori piano, doveri avere $\varepsilon_x = 0$ perchè nell' espressione di ϵ_x il blocco che ha influenza su gli spostamenti w è un blocco pieno di zeri. In questo caso l' allungamento non è nullo, lo possiamo vedere guardando la deformata. Questo accade perchè non siamo nel campo delle piccole rotazioni e quindi violo una delle ipotesi da cui ero partito e non posso linearizzare le funzioni trigonometriche.



Noi non lo sapiamo in realtà se questo elemento è ruotato o no, perchè non abbiamo disegnato la posizione della normale al piano di riferimento sulla deformata.

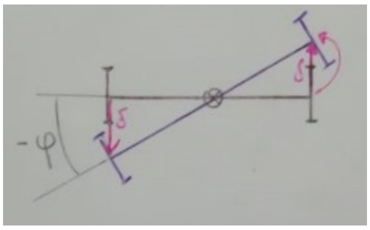
Infatti partendo dalla una configurazione indeformata disegno i segmenti in corrispondenza dei nodi della piastra che vanno da top a bottom, in basa a come sono posizionati questi elementi posso avere 2 configurazioni deformate diverse:

1^a CONFIGURAZIONE: $\varphi = 0$ non ho rotazione dei segmenti, infatti la deformazione è una deformazione tagliante fuori piano, ovvero a mazzo di carte



In questo caso $\frac{\partial w}{\partial x}$ non viene compensato da φ infatti ho una configurazione deformata a taglio

2^a CONFIGURAZIONE: $\varphi \neq 0$ ho una rotazione in senso negativo infatti anche nella configurazione deformata i segmenti restano ortogonali alla piastra e non ho deformazioni.



in questo caso $\frac{\partial w}{\partial x}$viene compensata da φ infatti la configuarzione non è deformata a taglio.

La pendenza $\frac{\partial w}{\partial x}$ a seconda di come sono definite le rotazioni dei nodi, può rappresentare un contributo in deformazione tagliante fuori piano o nessuna deformazione.

(IN UN CASO GENERICO)

in una vista allineata con y:

$\frac{\partial w}{\partial x} = \overline{\gamma}_{zx} - \Phi$

l'inclinazione del segmento rigido(segmento rosso in figura) rispetto all' indeformata è la pendenza locale del piano medio. Trovo $-\Phi$ perchè la rotazione in y è opposta.

in una vista allineata con x:

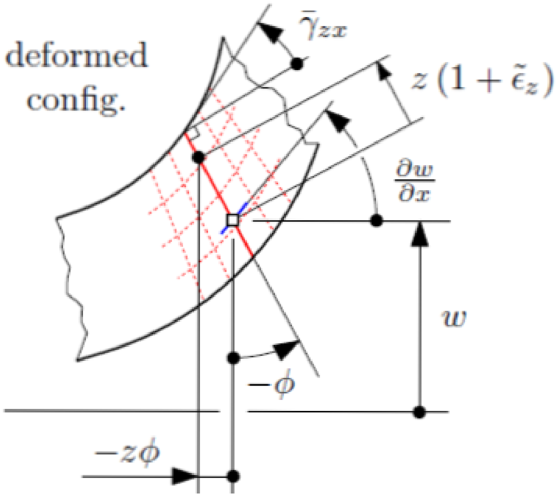
$\frac{\partial w}{\partial y} = \overline{\gamma}_{yz} + \Phi$.

Le relazioni che prima ho scritto in forma compatta, le posso esprimere in forma algebrica

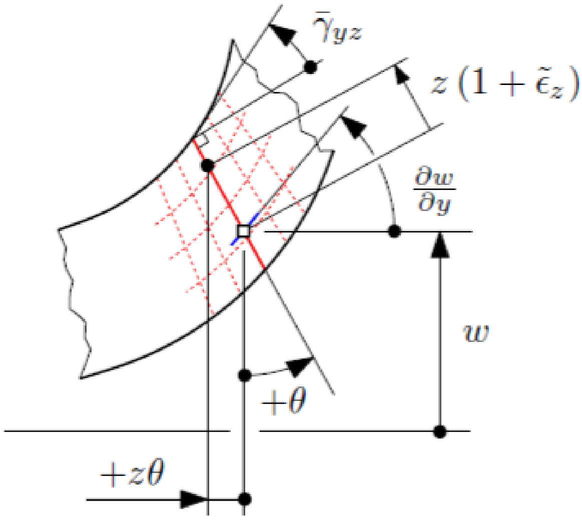
$$\begin{bmatrix} \overline{\gamma}_{zx} \\ \overline{\gamma}_{yz} \end{bmatrix} = \underline{\underline{\nabla}}(\xi,\eta)\underline{w} + \begin{bmatrix} \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{N}}(\xi,\eta) \\ -\underline{\underline{N}}(\xi,\eta) & \underline{\underline{0}} \end{bmatrix} \underline{d}$$

Se voglio mettere in relazione γ con i gradi di libertà nodali, compongo la matrice $\underline{\underline{B_{\overline{\gamma}}}}$:

$$\begin{bmatrix} \overline{\gamma}_{zx} \\ \overline{\gamma}_{yz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{\nabla}}(\xi,\eta) & \begin{matrix} \underline{\underline{0}} \\ -\underline{\underline{N}}(\xi,\eta) \end{matrix} & \begin{matrix} \underline{\underline{N}}(\xi,\eta) \\ \underline{\underline{0}} \end{matrix} \end{bmatrix} \underline{d}$$



configurazione deformata piano xz

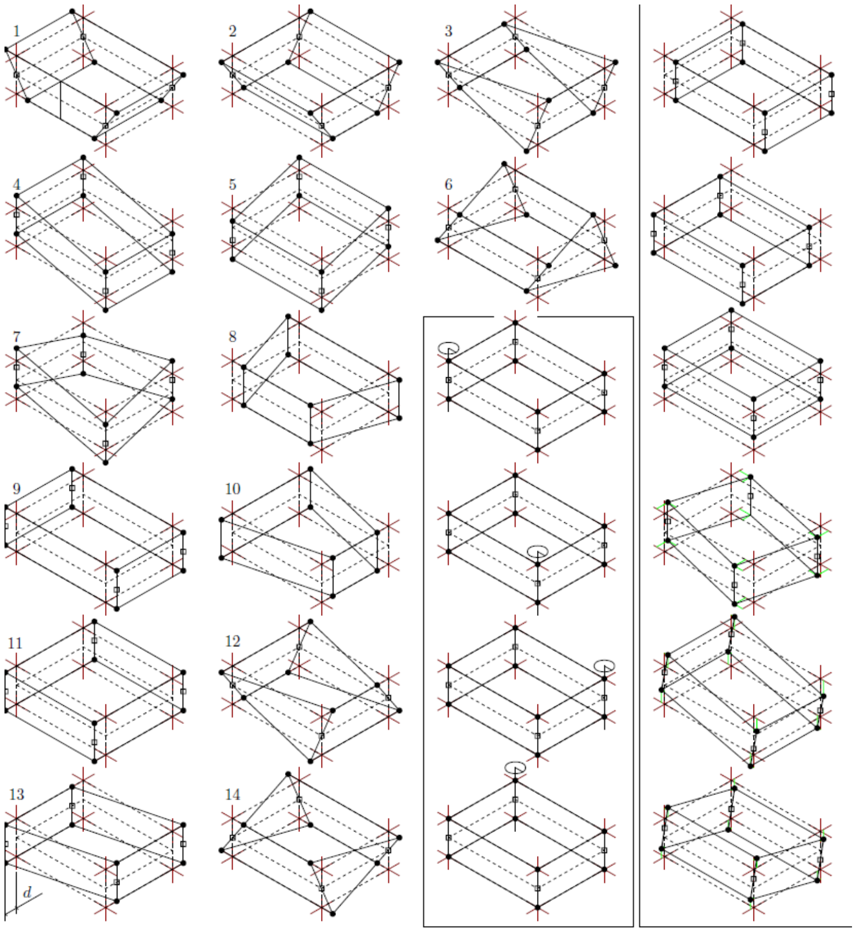


configurazione deformata piano yz

Con queste relazioni trovate posso procedere a ritroso infatti note le deformazioni, moltiplicando per la matrice $\underline{\underline{D}}$ ottengo le tensioni.

DEFORMAZIONI POSSIBILI

Il nostro elemento ha 24 gradi di libertà, le uniche deformazioni possibili sono combinazione lineare dei 24 stadi elementari che sono rappresentati in figura.



elemento rettangolare $2a \cdot 2b$, spessore h
spostamenti rappresentati di modulo d
$x = a\xi$, $y = b\eta$, $z = 0$