

Definito il lavoro virtuale interno associato alle componenti entropiano δQ_i^σ come segue:

$$\begin{aligned}\delta Q_i^\sigma &= \delta \underline{d}^T \left[\iint_A \int_h (\underline{B}_0^T + \underline{B}_1^T z) \underline{D} (\underline{B}_0 + \underline{B}_1 z) dz dA \right] \underline{d} \\ &= \delta \underline{d}^T \underline{K}_\sigma \underline{d}\end{aligned}$$

si nota come questo sia il prodotto tra il vettore trasposto degli spostamenti virtuali ($\delta \underline{d}^T$) moltiplicato per una matrice \underline{K}_σ e moltiplicato per il vettore che definisce l'attuale configurazione deformata dell'elemento (\underline{d}).

La matrice \underline{K}_σ viene ottenuta risolvendo l'integrale su volume che è espresso in formula ed in particolare, per svolgere questo tipo di integrazione, occorre differenziare l'operazione lungo lo spessore e lungo l'area. Utilizziamo perciò la regola di Cavalieri-Simpson lungo lo spessore, dato che così facendo siamo in grado di campionare lo stato deformativo top, middle e bottom di ogni strato; viceversa, per le integrazioni sull'area, utilizziamo delle regole basate su quadratura gaussiana (in particolare abbiamo già visto che è possibile ricavare queste per svariati punti di campionamento lungo ogni asse).

Le proprietà della quadratura gaussiana sono fondamentalmente due:

- Sono ampiamente ottimali sui polinomi (ciò vuol dire che una regola a n punti di campionamento, integra un polinomio di grado $2n-1$)
- Non campionano mai l'intervallo ai suoi estremi (così la funzione potrebbe potenzialmente essere mal definita sulla frontiera senza generare problemi; questa proprietà ci permette perciò di utilizzare alcune forme degeneri dell'elemento quadrilatero come, ad esempio, quando uno dei lati collassa in un punto).

Quindi quell'integrale diventa più semplicemente una sommatoria con peso lungo lo spessore (dove i termini della sommatoria sono i campionamenti top, middle e bottom di ogni strato e i pesi sono rispettivamente 1/6 per top, 4/6 per middle e 1/6 per bottom) e poi quando procedo all'integrale sull'area campiono il mio stato deformativo e tensionale su 4 punti che sono la mappatura dello spazio fisico dei punti che hanno sullo spazio naturale η e ξ pari a $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Secondo questa regola, preso l'elemento piastra, campiono dapprima lungo i 4 punti sul piano e poi lungo lo spessore secondo la regola di Cavalieri-Simpson (quindi così facendo campionerei lungo 12 punti: 2 per ogni asse, campionati lungo i 3 punti sullo spessore). Questo va bene se il materiale è uniforme lungo lo spessore, cioè non solo chimicamente ma anche in stato di elasto-plasticità.

Se si va a vedere il Mark Mentat \rightarrow Jobs \rightarrow Properties \rightarrow Job Parameters è presente Shell/Beam Layers pari a 5 che ci dice che in realtà il Mark non utilizza una regola a 3 punti ma aggiunge dei punti intermedi di campionamento; non utilizza la regola Simpson base ma si basa comunque su punti equispaziati con numero impostabile a piacere (digitando 3 si imposta infatti il valore di default della formula).

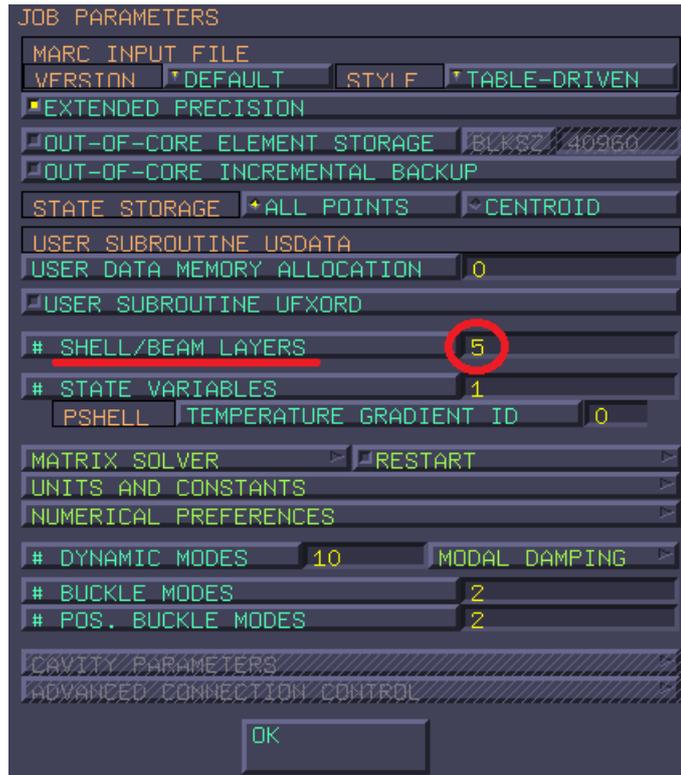


Figura 2

Aumentare il numero di punti di campionamento lungo lo spessore, aumenta la risoluzione con cui si può vedere la frontiera tra porzioni di piastra in stato elastico e porzioni di piastra in stato plastico. Perché ad ognuno di quei punti di campionamento viene valutata la componente ϵ ed anche le gamma fuori piano $\bar{\gamma}_{zx}$ e $\bar{\gamma}_{zx}$.

Una volta note, da quelle possiamo ricavare le relative tensioni (quindi le tre componenti di tensioni entro piano e le due fuoripiano) e da queste tensioni ottenere una tensione equivalente secondo Von Mises σ_{vm} (che verrà calcolata nei 4 punti per area, nei relativi 5 punti per spessore e cioè per un totale di 20 punti).

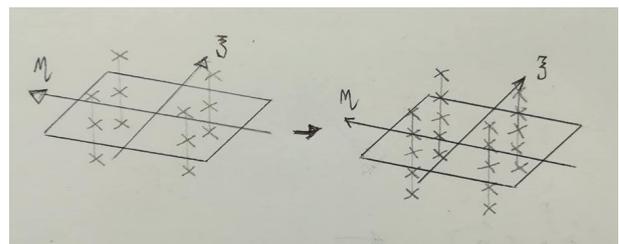


Figura 1

Quando viene fatto un calcolo elasto-plastico il sistema evolve nel tempo, quindi il carico (ad es. 300 kN) non è applicato tutto insieme ma vengono definiti una serie di valori a cui applicare il carico (10 kN , poi 20 kN ecc.) fino ad arrivare al valore di carico voluto. Perciò noi supponiamo la presenza di questo legame elastico e cioè che lo stato di ognuno di quei punti non sia variato dall'incremento precedente; perciò se prima era elastico viene supposto, dalle deformazioni, che il materiale sia ancora tale e infine con le leggi del legame costitutivo elastico può essere calcolata la tensione equivalente secondo Von Mises.

Dopodiché si controlla che la σ_{vm} sia al di sotto della tensione di snervamento e se così dovesse essere, questo proverebbe che l'ipotesi elastica viene rispettata (cioè che quel eventuale punto di integrazione in è in stato elastico). In seguito, si aumenta il carico e si riprocede con il calcolo della Von Mises. Se dovesse verificarsi il caso contrario (cioè σ_{vm} maggiore della tensione di snervamento), verranno cambiate da elastiche a plastiche le ipotesi di lavoro, per cui si andranno a utilizzare matrici $\underline{\underline{D}}$ (matrice legame costitutivo tensione piana) adatte. Il procedimento sopra descritto andrà ripetuto per ognuno dei punti, con l'obiettivo di andare a verificare se occorre utilizzare una trattazione elastica o plastica a seconda del punto.

Si può immaginare ad esempio, che su i 5 punti di uno spessore venga applicato un dato carico e che solo su quello più esterno (il top magari) venga superato il limite elastico, ottenendo perciò snervamento; avremmo quindi uno spessore per 1/5 plastico e per 4/5 elastico. Procedendo con l'aumentare del carico potrebbe accadere che anche nel punto subito sotto al top venga a ottenersi snervamento, passando così ad una situazione in cui si ha 2/5 di stato plastico e 3/5 di stato elastico lungo lo spessore. Con l'aumentare del carico si potrebbe procedere così fino allo snervamento totale lungo lo spessore.

La transizione elasto-plastica ha una risoluzione che è dell'ordine della distanza da punto a punto, quindi se si vuole avere una resa molto precisa di dove è la frontiera elasto-plastica lungo la piastra, devo aumentare il numero di punti di campionamento. Va però notato che si ha poca risoluzione nel definire effettivamente quanta porzione di uno strato è elastico-plastico, infatti ogni strato può essere o completamente elastico, oppure parzialmente plastico per varie porzioni (1/5, 2/5 ecc.).

Al fine di avere più risoluzione, non viene presa in considerazione l'opzione di aumentare i punti di integrazione lungo piano (ovvero lungo l'area di un elemento) piuttosto che lungo lo spessore; questo perchè è più conveniente suddividere l'elemento in più parti e per ognuna di queste campionare sempre in 4 punti. Nella frontiera dell'elemento infatti, gli spostamenti sono continui ma la loro derivata non lo è e dato che si tenta di rappresentare lo spostamento introelemento con forme polinomiali, maggiore sarà il grado del polinomio e più alte saranno le oscillazioni di questo; si preferisce allora infittire la mesh, di modo tale di avere più polinomi di basso grado e quindi più precisi.

Quindi questi punti di integrazione rappresentano dei punti di campionamento delle tensioni, che possono essere dichiarati elastici o plastici, in funzione dello stato tensionale. Il Mark utilizza quei punti di integrazione anche per fornire la σ_{11} stress di ognuno di questi punti; infatti le tensioni e le deformazioni (e tutte le quantità ad essere correlate come energia potenziale elastica, energia dissipata plasticamente ecc.) sono tutte fornite sui punti di integrazione e non sui nodi. Una volta trovata la matrice $\underline{\underline{K}}_{\sigma}$, vengono svolti analoghi passaggi per il lavoro virtuale associato alle componenti fuoripiano δQ_i^{γ} , ricavando perciò la matrice $\underline{\underline{K}}_{\gamma}$. La somma di queste due matrici ($\underline{\underline{K}}_{\gamma} + \underline{\underline{K}}_{\sigma}$) fornisce in definitiva la matrice rigidezza $\underline{\underline{K}}$ di ogni elemento.

Vediamo ora che effetto ha la formulazione appena definita sulla risposta di un elemento in fase elastica. In particolare, ci focalizziamo su quelli che sono i 4 modi trapezi, cioè quelli in cui la deformazione trapezia avviene entropiano (ed in particolare viene osservata da sopra o da sotto nei modi 8 e 10) e quelli in cui avviene con contributo fuori piano (in cui è osservata dai fianchi, modi 1 e 2).

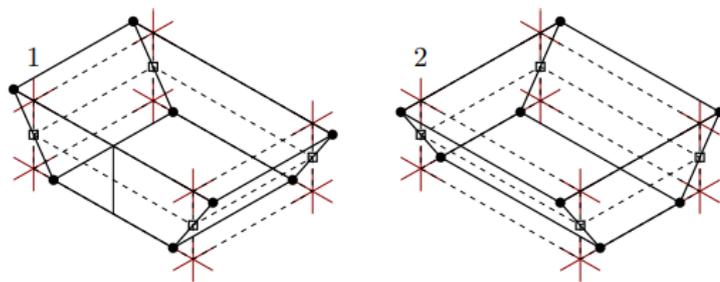
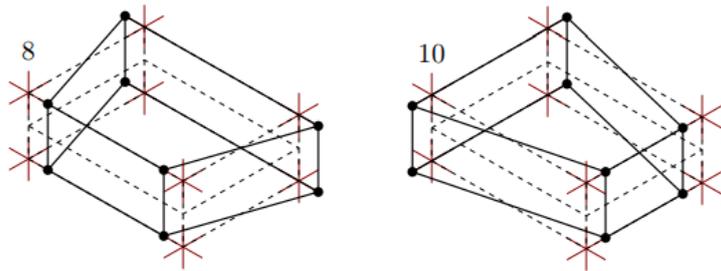


Figura 3

Figura 4



La deformazione trapezia viene scelta, poiché è la migliore possibilità che si ha per rappresentare stati di flessione. Per meglio comprendere, consideriamo adesso un elemento piastra, avente un suo spessore, che nasce rettangolare e che venga utilizzato ad esempio per rappresentare una trave a sbalzo (in spessore sottile) incastrata per una estremità, mentre per l'altra estremità viene imposta una rotazione 2θ ; questo valore 2θ , viene scelto poiché supponiamo siano due gli elementi piastra (in alternativa al normale elemento trave). Essendo i due elementi gemelli, anche elasticamente, viene supposto che quella rotazione 2θ dia una rotazione relativa di θ tra gli estremi di ognuno dei due elementi.

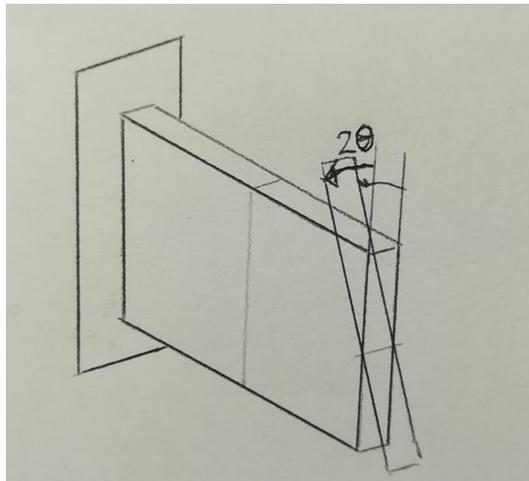


Figura 5

Oppure, equivalentemente, potremmo applicare le nostre considerazioni ad una sezione quadrata cava (Figura 6), a cui venga applicata una rotazione imposta della stessa forma; in tal caso l'elemento superiore risulterebbe in trazione, quello inferiore in contrazione, ma gli elementi sui fianchi sarebbero nella stessa condizione della parete precedente.

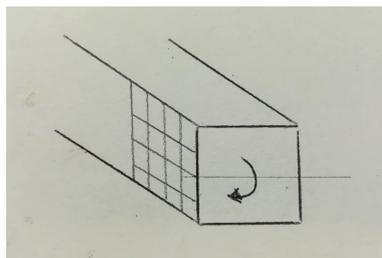


Figura 6

Quello a cui si assiste è una deformazione del tipo in Figura 7 ed in questo specifico caso si ha anche la soluzione esatta, che sarà quella della trave.

(Nota: l'angolo θ utilizzato in precedenza è lo stesso che la notazione successiva indica con α)

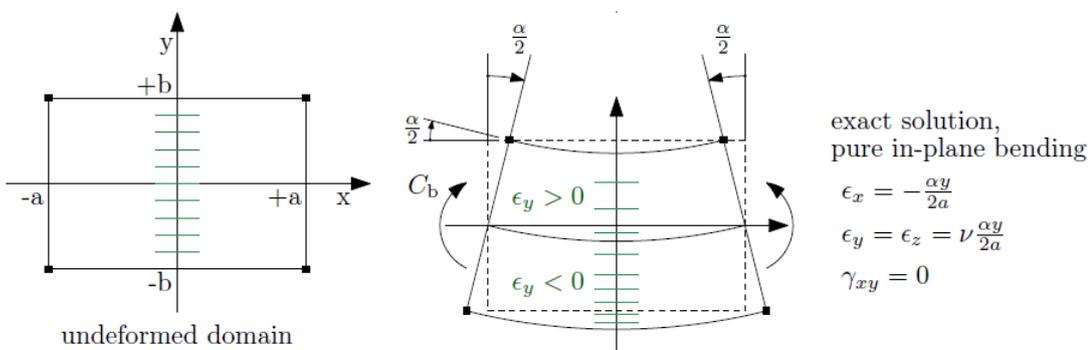


Figura 7

Si può costruire un oggetto analogo anche prendendo un elemento piastra e imponendo una rotazione $\frac{\theta}{2}$ e una controrotazione $\frac{\theta}{2}$, ottenendo così una configurazione trapezia se vista di lato. Ovvero si può ottenere una configurazione trapezia, sia operando entropiano che sui fianchi, ma le considerazioni successive sarebbero analoghe.

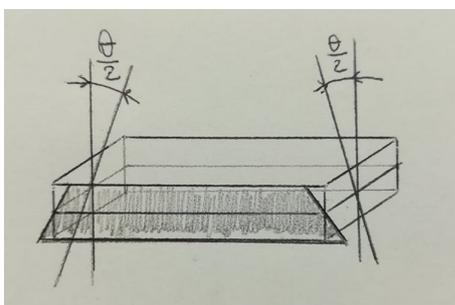


Figura 8

Tornando perciò al primo oggetto, si assume libera strizione fuori piano e che nella piastra si abbia una libera curvatura anticlastica (ovvero che si deformi a sella liberamente). La soluzione flessionale prevede un campo di spostamenti che derivato dà le deformazioni ϵ_x, ϵ_y e γ_{xy} . Viene utilizzato un sistema di

assi x e y (che non sono altro che la mappatura di η e di ξ nell'elemento rettangolare in figura), per cui si avranno un allungamento secondo x e uno secondo y; non ci sarà una tensione associata per via della libera strizione (cioè $\gamma_{xy} = 0$) e infine ci sarà la totale assenza di deformazione taglianti (se viene tracciato un reticolo ortogonale sull'indefornata, questo reticolo mantiene gli angoli di 90 gradi anche nella inderformata).

Nella realtà il meglio che riesce a fare l'elemento nell'inseguire la forma esatta in Figura 7, è la deformazione trapezia in Figura 9. Questa definisce degli spostamenti nodali che vengono interpolati nell'elemento con funzioni di forma binelari; si assume inoltre che lungo l'asse z (uscente dal piano di riferimento) ci sia assenza di curvature e che lo stato deformativo al piano di riferimento sia lo stesso per ogni altro livello in z della piastra.

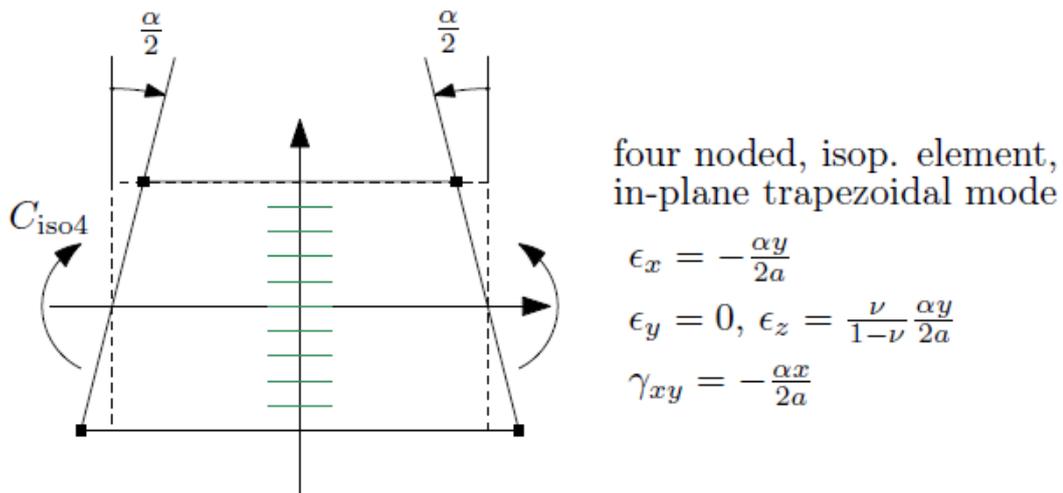


Figura 9

Andando ad utilizzare le funzioni di interpolazione, con le loro derivate, si ottengono le deformazioni approssimate ϵ_x (che è identica a quella esatta), ϵ_y (diversa poiché non c'è la strizione per effetto Poisson; graficamente lo vediamo perché ci sono delle linee di riferimento orizzontali che rimangono equispaziate, a differenza del caso reale in cui si infittiscono o diradano a seconda di trazione o compressione) e γ_{xy} (compare una deformazione tagliante entropiano che è dello stesso ordine della ϵ_x ; in particolare se $a=b$ sarà esattamente identica).

Dalle deformazioni si ricavano le tensioni, che moltiplicate per le deformazioni danno il contributo energetico. Andando ad integrare il contributo energetico sull'elemento, sia considerando il campo di deformazioni esatto sia quello approssimato, si arriva a definire i seguenti valori di energia:

$$U_b = \iiint_V \underline{\epsilon}^T \underline{\sigma} dV \quad (1)$$

$$U_{iso4} = \iiint_V \underline{\epsilon}^T \underline{\sigma} dV \quad (2)$$

(Nota: nel secondo integrale, nonostante siano state indicati con la medesima notazione, si fa riferimento ai valori ottenuti tramite approssimazione).

Queste quantità sono funzioni di θ (poiché gli ϵ stessi sono funzioni di θ) e si può pertanto applicare il secondo teorema di Castigliano, per cui calcolata la derivata parziale dell'energia potenziale elastica rispetto ad una rotazione o uno spostamento (in questo caso la rotazione θ) viene restituita l'associata coppia o forza che la genera (nel nostro caso la coppia).

$$\frac{\partial U_b(\theta)}{\partial \theta} = C_b \quad (3)$$

$$\frac{\partial U_{iso4}(\theta)}{\partial \theta} = C_{iso4} \quad (4)$$

Risulta che a parità di rotazione imposta tra gli estremi, la coppia derivata dalla formulazione degli elementi finiti se rapportata all'equivalente ideale, ha un andamento funzione del coefficiente di Poisson e del rapporto a su b. Cioè:

$$\frac{C_{iso4}}{C_b} = \frac{1 + \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{a}{b}\right)^2}{1 - \nu^2} \quad (5)$$

A titolo di esempio si valuta quel rapporto nei valori $\nu = 0.3$ (tipico degli elementi strutturali) e $\frac{a}{b} = 1$ (cioè un quadrato), ottenendo $\frac{C_{iso4}}{C_b} = 1.48$; ovvero si ottiene un 48% di più di coppia rispetto alla soluzione esatta, avendo di conseguenza un oggetto che è il 48% più rigido di quello che dovrebbe essere. Questo irrigidimento prende il nome di **shear locking** ed in un caso di carico banale e semplice come quello analizzato NON è un errore accettabile. Quel sovrappiù di coppia si rivela essere un sovrappiù di energia, questo deriva dal fatto che è presente un termine energetico in più nella forma approssimata rispetto a quello presente nella forma ideale (è presente quindi un termine spurio). Per identificare questo problema si sottrae dalla forma apposta la quota parte della deformazione esatte, ottenendo il termine spurio. Sottraendo pertanto la Figura 7 alla Figura 9 si ottiene:

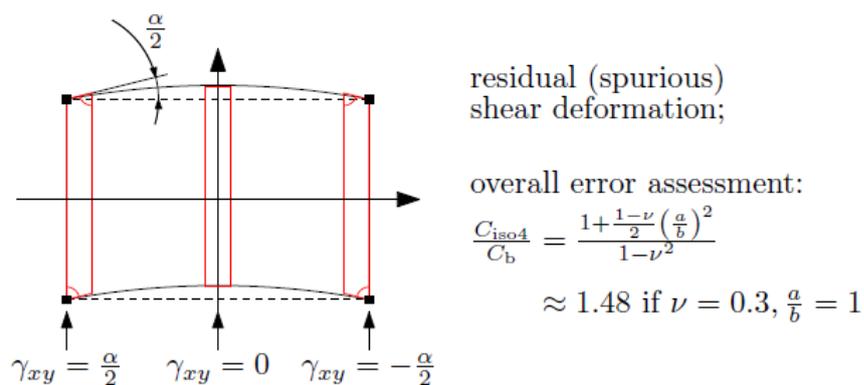


Figura 10

Questo oggetto è la sorgente dell'irrigidimento, legata al fatto che i bordi dovrebbero incurvarsi ma le funzioni di interpolazione bilineari impongono che siano rettilinei. Non c'è ϵ_x , c'è in quantità piccole ϵ_y ma è soprattutto presente γ_{xy} che può essere visualizzata graficamente. Infatti se si andasse a disegnare

delle strisce rettangolari sull'elemento indeformato, noteremmo che una volta che quest'ultimo viene deformato, la striscia centrale resta rettangolare, ma le strisce sui fianchi le ritrovo deformate a forma di parallelogramma (con un angolo agli estremi pari a $\frac{\theta}{2}$). Proprio questo ultimo termine γ_{xy} verrà moltiplicato per il modulo di taglio, per cui verrà associata una τ . La τ e la γ_{xy} insieme compiono lavoro una su l'altro e forniranno quel termine energetico che alza fittiziamente il lavoro da applicare per ottenere una certa rotazione. Occorre allora trovare il modo per ridurre quel 48% ad uno 0%, cioè di limitare lo shear locking.

Si procede in due modi:

1. Invece di usare un elemento 4 nodi, se ne utilizza uno 8 nodi che faccia pertanto uso anche degli elementi di centro lato. Di modo tale che l'elemento può incurvare i lati sopra e sotto in forma parabolica e non risenta dell'irrigidimento.

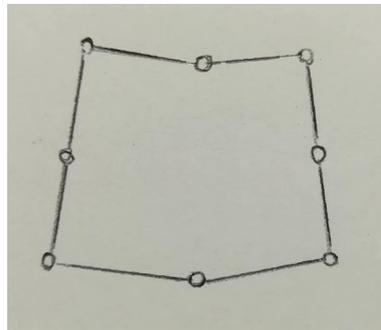


Figura 11

2. Si procede considerando che i modi di Figura 3 e Figura 4 non siano validi. Per tanto al loro posto si cercano delle varianti tali per cui invece di avere una deformazione trapezia, si abbia una deformazione a settore di corona circolare o quanto meno descritta da parabole. Si arriva pertanto a una configurazione come quella in Figura 12, in cui gli angoli sono mantenuti di 90 gradi e si assume che il materiale tra i nodi inferiori si sposti per interpolazione lineare più una correlazione parabolica, necessaria per limitare l'irrigidimento.

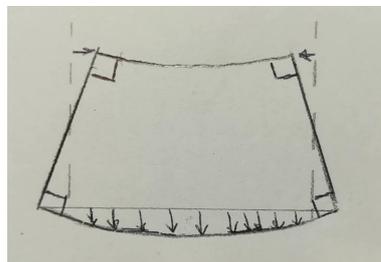


Figura 12

Questo secondo tipo di procedura viene utilizzato anche nel Mark, andando su Geometric Properties-> Structural Properties e spuntando Assumed Strain.

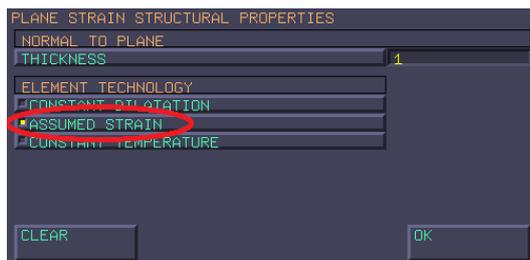


Figura 13

Gli elementi del secondo metodo risolutivo, recano però dei problemi; questi sono detti **incompatibili** poiché non rispettano la continuità degli spostamenti tra elemento ed elemento. Se infatti si prendono due di questi elementi uno sopra l'altro e si deformano assialmente, con allungamenti come in Figura 14, sulla base delle inclinazioni dei fianchi si vanno a costruire le parabole curvature dei due lati sopra e sotto (ovvero traccio un tratto di circonferenza con raggio centrato nel punto in cui si intersecano le prosecuzioni dei lati obliqui) per ognuno dei due elementi. Sull'elemento di sotto la curvatura è però più marcata, così si nota che in mezzo i due elementi viene a crearsi un buco, una cricca; si incontra perciò una discontinuità tra gli elementi (Nota: dentro l'elemento non ci sono discontinuità, ma ce ne sono TRA gli elementi).

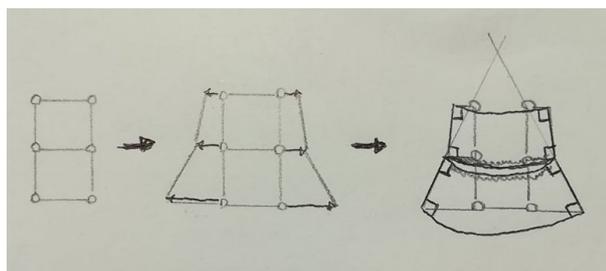


Figura 14

Quando non c'è continuità vengono a crollare tutti i teoremi che ci garantiscono la convergenza della soluzione FEM alla soluzione esatta all'infittirsi della mesh; tuttavia, all'atto pratico, questi elementi funzionano abbastanza bene e pertanto questi problemi sulla teoria vengono cautamente ignorati. Quello che si vede dunque, utilizzando questo metodo, è che gli angoli rimangono di 90 gradi e pertanto non viene a manifestarsi il taglio indotto e il conseguente problema di shear locking.

E' perciò importante che se un corpo sottile viene modellato con un solo elemento lungo lo spessore, sia spuntato Assumed Strain, altrimenti si ottiene una soluzione più rigida in caso di utilizzo di elementi regolari (da notare anche che 48% è riferito al caso di quadrato in cui $\frac{a}{b} = 1$, ma se si usassero elementi sottili e lunghi, il rapporto $(\frac{a}{b})^2$ aumenterebbe notevolmente comportando valori molto superiori al 48%, anche 200%).

Se non si vuole modificare le funzioni di forma, perché non si vuole accettare la discontinuità degli spostamenti, l'unica possibilità è quella di cercare di "non vedere" la deformazione spuria nel computo

energetico. Per fare questo si prende in considerazione l'unico punto che non mostra deformazioni γ , sia che si fletta l'elemento sopra e sotto, sia che si fletta ai lati: il centroide. Invece di effettuare una regola di campionamento due punti per asse, si procede pertanto campionando in un punto solo per asse e cioè al centroide; così facendo si ritiene lo stato al centroide, significativo per tutto l'elemento (così non essendoci γ spuria al centroide non ce ne è neanche per l'elemento). Anche con questo procedimento soggiunge un problema; se si va infatti a considerare lo stato deformativo di quel punto, si nota che è nullo (in Figura 9 si vede come la fibra verticale passante per il centroide non si allunga e neanche quella orizzontale), ma se viene ritenuto come punto significativo questo comporta che tutto l'elemento risulta indeformato. Quindi a fronte di un elemento vistosamente deformato, si otterrebbe come soluzione che tutto l'elemento non si deforma. In Mark il campionamento sotto integrato viene fornito in Job-> Element Type->Shell->Thick Shell, infatti si vede come l'elemento 140 sia quello ad integrale con un punto in meno al normale.

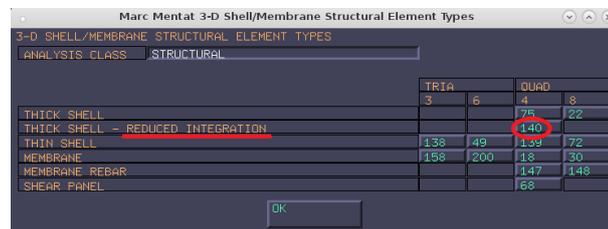


Figura 15

Il problema di questi elementi, è che si va incontro ad un comportamento non voluto che va corretto; se campiono tutte le deformazioni al centroide dovrei avere $C_{el} = 0$, ottengo cioè un elemento che non reagisce a flessione. Se metto più di un elemento lungo spessore però (come in Figura 16), a fronte di un disallineamento, la fibra centrale resta invariata (e quindi effettivamente mi dà contributo energetico nullo) ma nel caso dell'elemento superiore e inferiore si vede come le fibre nella realtà si accorcino o allunghino; quindi anche se elemento per elemento faccio una assunzione non sempre valida, quanto meno nell'insieme complessivo degli elementi si può assumere l'energia potenziale nulla.

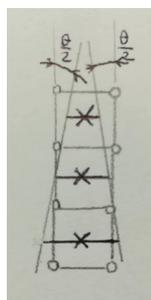


Figura 16

Questi moti sono moti che lasciano pertanto il campo indeformato ad energia elastica potenziale nulla (noti anche come **meccanismi interni**) e viene analizzato adesso il caso di una griglia di elementi 3 x 3, ad unico punto di integrazione, soggetti ad allungamenti come in Figura 17. Si vuole ottenere un moto

che permetta di lasciare le fibre passanti per i centroidi indeformate; per farlo si ricorre allora ad un moto detto “a clessidra” (moto di **hourglass**) che è un meccanismo interno indistinguibile da moti di corpo rigido. Tutti gli elementi sottointegrati hanno questo problema, ma vengono usati in campi specifici in cui occorrono costi computazionali di calcolo che siano il minore possibile. Per correggere questo problema si procede numericamente e non fisicamente.

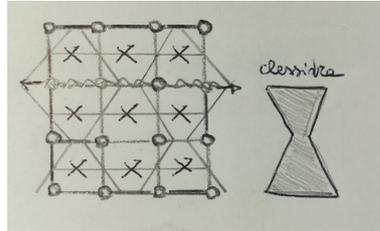


Figura 17

Per evitare di campionare tutto al centroide, si risolve l’integrale per area (affrontato all’inizio) utilizzando per termini della matrice che riguardano la γ_{xy} , una legge a un punto mentre per gli altri termini, una legge a due punti per asse (cioè per i termini σ_x e σ_y). Nel caso in cui si tratti invece l’integrale per area per componenti fuoripiano, si opera sempre al centroide.

Facendo così si hanno delle legge di integrazione miste, che vanno molto bene nel caso si tratti materiale elastico lineare ma non nell’elasto-plastico, dato che prendendo le σ e le γ in punti diversi non si può calcolare la Von Mises in maniera certa.

Anche questo problema è stato risolto successivamente e per meglio comprendere come, sia preso un quadrilatero come in Figura 18, a cui si applicano una rotazione e una controrotazione sui nodi 1 e 2 ottenendo la deformata trapezia. Si ha deformazione tagliante, ma non è presente al centro; quindi questa deformazione $\gamma_{z\hat{1}2}$, visibile sul piano, viene campionata nel punto centrale tra i nodi 1 e 2 (indicati con la direzione entropiano $\hat{1}2$) dato che in quel punto non si avranno problemi di shear locking.

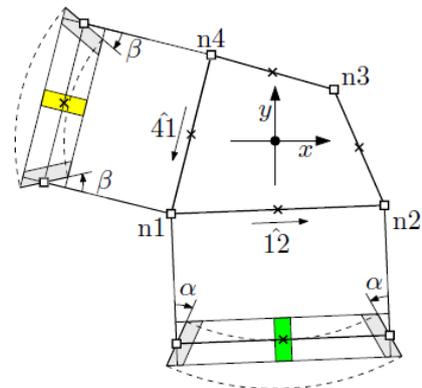


Figura 18

Se poi si aggiungesse uno spostamento fuoripiano dei due estremi (in Figura 19 rappresentati da w_1 e w_2), si otterrebbe un altro tipo di deformata che presenta una γ non nulla.

Si procede anche in questo caso campionando le varie γ nei punti intermedi dei lati e nessuna di queste componenti sarebbe influenzata dalla componente di taglio spuria. Una volta misurate queste 4 gamma, si prendono quelle dei due lati $\hat{1}2$ e $\hat{4}1$ e si considerano applicate nel solo nodo 1. Così facendo $\gamma_{z\hat{1}2}$ e $\gamma_{z\hat{4}1}$ vengono sommate vettorialmente, fornendo una risultante che può essere a sua volta riscomposta secondo gli assi x,y,z (dando vita a $\gamma_{zx,n1}$ e $\gamma_{yz,n1}$). Ragionamento analogo viene fatto per ogni nodo dell’elemento, ottenendo così un campionamento delle deformazioni fuoripiano ai 4 nodi. Vengono poi

utilizzate le funzioni di interpolazione per interpolare i valori nodali verso l'interno, così da ottenere da quelle γ_{zx} e γ_{yz} ai nodi, le stesse gamma ma ai punti di integrazione (cioè ai 4 punti di Gauss). A questo punto ai 4 punti di Gauss si conosce lo stato deformativo completo ($\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}, \gamma_{zx}$ e γ_{yz}), da cui si possono derivare le associate tensioni e da queste calcolare la Von Mises senza problemi.

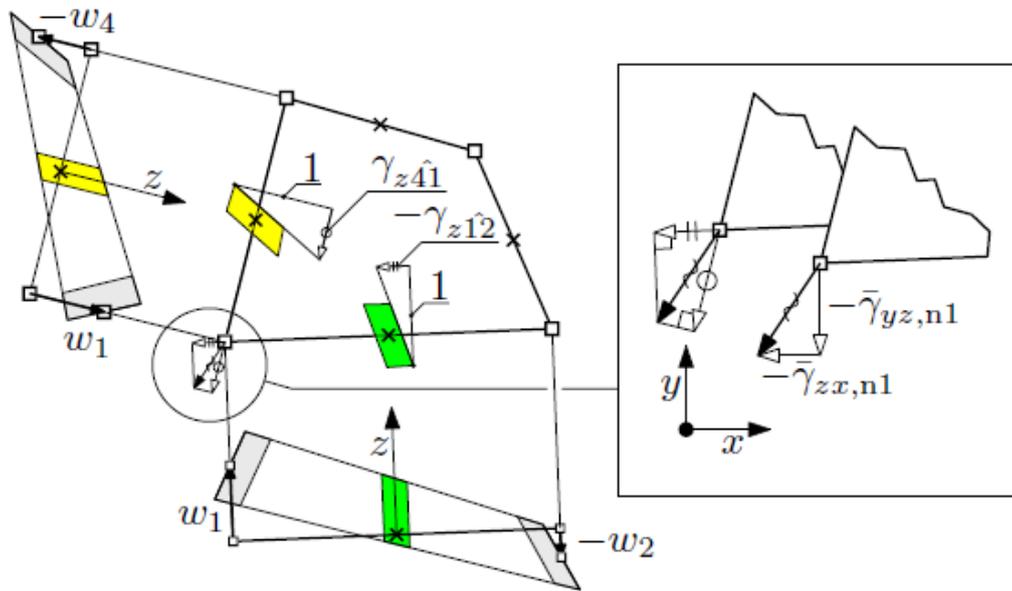


Figura 19

Si riesce così finalmente a compensare lo shear locking per i modi di deformazione trapezia 1,2 ma nell'8 e 10 no.