0.0.1 Rigid body link RBE2

A master (or retained, control, independent, etc.) C node is considered, whose coordinates are defined as x_C, y_C, z_C in a (typically) global reference system, along with a set of n P_i nodes whose coordinates are x_i, y_i, z_i.

A kinematic link is to be established such that the Degree of Freedom (DOF)s – or a subset of them – associated to the P_i nodes follow the rototranslations of the C control according to the rigid body motion laws.

In the case of a fully constrained P_i node we have

$$\begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \theta_i \\ \phi_i \\ \psi_i \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & +(z_i - z_C) & -(y_i - y_C) \\ 0 & 1 & 0 & -(z_i - z_C) & 0 & +(x_i - x_C) \\ 0 & 0 & 1 & +(y_i - y_C) & -(x_i - x_C) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{\mathrm{L}}}_i} \cdot \begin{bmatrix} u_C \\ v_C \\ w_C \\ \theta_C \\ \phi_C \\ \psi_C \end{bmatrix} \tag{1}$$

where u, v, w (θ, ϕ, ψ) are the translation (rotation) vector components with respect to the x, y, z cartesian reference system. A subset of the above DOF dependency relations may be cast to obtain a partial constraining of the P_i node; a free relative motion of such node with respect to the rigid body is allowed at the unconstrained DOFs.

External actions that are applied to tied P_i DOFs are reduced to the master node in form of a statically equivalent counterpart; the contributions deriving from each P_i node are finally accumulated.

0.0.2 Distributed load / averaged motion link RBE3

YYY

Si considera un nodo dipendente C di coordinate x_C, y_C, z_C, detto nodo di controllo (alle forze... altrimenti la definizione è impropria), ed una nuvola di n nodi indipendenti P_i di coordinate x_i, y_i, z_i e con peso relativo assegnato q_i.

Si considera applicato al nodo C un sistema di azioni esterne nella forma delle tre componenti di forza U_C, V_C, W_C e nelle tre componenti di momento Ω_C, Φ_C, Ψ_C, riunite nel vettore

$$\underline{F}_C = [\ U_C\ V_C\ W_C\ \Omega_C\ \Phi_C\ \Psi_C]^T$$

.

Si definisce un centro di massa G della nuvola di punti, le cui coordinate sono al solito

$$x_G = \frac{\sum_i q_i x_i}{\sum_i q_i}, \quad y_G = \frac{\sum_i q_i y_i}{\sum_i q_i}, \quad z_G = \frac{\sum_i q_i z_i}{\sum_i q_i}. \tag{2}$$

Si suppone inoltre che il sistema di riferimento $Gxyz$ sia **principale d'inerzia** per la distribuzione di pesi; nel caso tale ipotesi non sia verificata occorre procedere come segue:

- cambio di sistema di riferimento da terna xyz ad una terna ausiliaria $\xi\eta\zeta$ con orientazione principale d'inerzia per la specifica distrubuzione RBE3;
- applicazione della procedura sotto descritta utilizzando posizioni nodali e componenti di forza/momento scomposte secondo la terna ausiliaria $\xi\eta\zeta$ in luogo della predefinita xyz;
- trasformazione inversa delle quantità risultanti da terna ausiliaria $\xi\eta\zeta$ a terna originale xyz.

Si definisce quindi una prima relazione di dipendenza cinematica, per cui le rototraslazioni

$$\underline{\delta}_C = [u_C\ v_C\ w_C\ \theta_C\ \phi_C\ \psi_C]^T$$

di C sui tre assi x, y, z sono definite in funzione delle rototraslazioni

$$\underline{\delta}_G = [u_G\ v_G\ w_G\ \theta_G\ \phi_G\ \psi_G]^T$$

del centro di massa G secondo il vincolo di rototraslazione rigida

$$\begin{bmatrix} u_C \\ v_C \\ w_C \\ \theta_C \\ \phi_C \\ \psi_C \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & +(z_C - z_G) & -(y_C - y_G) \\ 0 & 1 & 0 & -(z_C - z_G) & 0 & +(x_C - x_G) \\ 0 & 0 & 1 & +(y_C - y_G) & -(x_C - x_G) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{L}}_{CG}} \cdot \begin{bmatrix} u_G \\ v_G \\ w_G \\ \theta_G \\ \phi_G \\ \psi_G \end{bmatrix} \tag{3}$$

già visto per le RBE2.

Tale relazione cinematica può essere imposta solo su un sottoinsieme dei gg.d.l. associati al nodo C, lasciando svincolati (e indipendenti) i restanti.

Come osservato al paragrafo (**??**), all'imposizione di tali relazioni cinematiche è associata una riduzione a nuovo punto di applicazione G delle azioni agenti su C, con l'introduzione di opportuni momenti di trasporto come da

$$\underline{\mathrm{F}}_G = \left[\underline{\underline{\mathrm{L}}}_{CG}\right]^T \cdot \underline{\mathrm{F}}_C, \quad \underline{\mathrm{F}}_G = [U_G\ V_G\ W_G\ \Theta_G\ \Phi_G\ \Psi_G]^T \tag{4}$$

Tale vincolo deriva dall'imposizione di pari lavoro *virtuale* dei sistemi di forze su C e su G

$$\mathcal{L}_C = \underline{\delta}_C^T \underline{\mathrm{F}}_C = \left(\underline{\underline{\mathrm{L}}}_{CG}\, \underline{\delta}_G\right)^T\ \underline{\mathrm{F}}_C = \underline{\delta}_G^T \underbrace{\underline{\underline{\mathrm{L}}}_{CG}^T \underline{\mathrm{F}}_C} = \underline{\delta}_G^T \underline{\mathrm{F}}_G = \mathcal{L}_G \tag{5}$$

Si definisce quindi una seconda relazione di dipendenza per cui da una parte lo spostamento del nodo G risulti la media pesata degli spostamenti ai nodi P_i, ovvero

$$u_G = \frac{\sum_i q_i u_i}{\sum_i q_i}, \quad v_G = \frac{\sum_i q_i v_i}{\sum_i q_i}, \quad w_G = \frac{\sum_i q_i w_i}{\sum_i q_i}, \tag{6}$$

e dall'altra le forze applicate in C e ridotte a G si distribuiscano ai nodi P_i secondo i pesi dati, ossia

$$U'_i = U_G \frac{q_i}{\sum_i q_i}, \quad V'_i = V_G \frac{q_i}{\sum_i q_i}, \quad W'_i = W_G \frac{q_i}{\sum_i q_i}. \tag{7}$$

Per quanto riguarda la distribuzione dei momenti ridotti a G sui nodi P_i, si preferisce operare in termini di una seconda quota di forze nodali U''_i, V''_i, W''_i piuttosto che in termini di quote momento $\Theta'_i, \Phi'_i, \Psi'_i$.

Riferendosi a Figura 1, si considerano le componenti di momento Θ_G, Φ_G, Ψ_G singolarmente nella riduzione a sistemi di forze equivalenti.

Preso l'esempio particolare della componente z di momento Ψ_G, ad essa viene sostituito un sistema equivalente di forze $\underline{\mathrm{F}}_{\Psi,i}$ distribuite ai punti P_i in sole componenti x, y tali da avere

- retta d'azione sul piano x, y, normale alla congiungente $G - P_i$ ivi proiettata

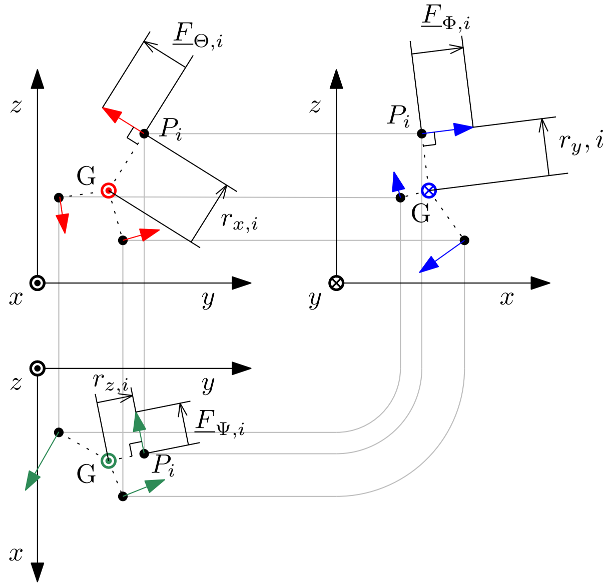

Figure 1: Schema distribuzione momenti

- verso coerente con il momento stesso
- modulo proporzionale alla distanza proiettata

$$r_{z,i} = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2}, \quad \Delta x_i = x_i - x_G, \quad \Delta y_i = y_i - y_G \tag{8}$$

  e al peso q_i del nodo

- momento risultante della distribuzione pari a $\Psi_G \hat{k}$

In particolare risulta

$$\underline{\mathrm{F}}_{\Psi,i} = \frac{\Psi_G q_i}{\sum_j q_j r_{z,j}^2} \left(-\Delta y_i \, \hat{\underline{\imath}} + \Delta x_i \, \hat{\underline{\jmath}}\right) \tag{9}$$

e, una volta definiti

$$r_{x,i} = \sqrt{\Delta y_i^2 + \Delta z_i^2}, \quad r_{y,i} = \sqrt{\Delta z_i^2 + \Delta x_i^2}, \quad \Delta z_i = z_i - z_G$$

si hanno per le altre componenti di momento le forme

$$\underline{\mathrm{F}}_{\Theta,i} = \frac{\Theta_G q_i}{\sum_j q_j r_{z,j}^2} \left(-\Delta z_i \, \hat{\underline{\jmath}} + \Delta y_i \, \hat{\underline{\mathrm{k}}} \, , \right) \tag{10}$$

$$\underline{\mathrm{F}}_{\Phi,i} = \frac{\Phi_G q_i}{\sum_j q_j r_{y,j}^2} \left(-\Delta x_i \,\hat{\underline{\mathrm{k}}} + \Delta z_i \,\hat{\underline{\imath}} \right) \tag{11}$$

le quali, raccolte per componenti e in notazione più compatta, danno

$$U_i'' \hat{\imath} + V_i'' \hat{\jmath} + W_i'' \hat{k} = q_i \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{\Theta_G}{\sum_j q_j r_{x,j}^2} & \frac{\Phi_G}{\sum_j q_j r_{y,j}^2} & \frac{\Psi_G}{\sum_j q_j r_{z,j}^2} \\ \Delta x_i & \Delta y_i & \Delta z_i \end{vmatrix} \tag{12}$$

I termini in (12) andranno sommati a quelli ricavati in (7), per cui la forza distribuita dal link RBE3 sull'i-esimo nodo risulterà

$$\underline{\mathrm{F}}_i = U_i \hat{\imath} + V_i \hat{\jmath} + W_i \hat{k} = (U_i' + U_i'') \hat{\imath} + (V_i' + V_i'') \hat{\jmath} + (W_i' + W_i'') \hat{k} \tag{13}$$

o, in forma algebrica

$$\begin{bmatrix} U_i \\ V_i \\ W_i \end{bmatrix} = q_i \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{\sum_j q_j} & 0 & 0 & 0 & +\frac{\Delta z_i}{\sum_j q_j r_{y,j}^2} & -\frac{\Delta y_i}{\sum_j q_j r_{z,j}^2} \\ 0 & \frac{1}{\sum_j q_j} & 0 & -\frac{\Delta z_i}{\sum_j q_j r_{x,j}^2} & 0 & +\frac{\Delta x_i}{\sum_j q_j r_{z,j}^2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sum_j q_j} & +\frac{\Delta y_i}{\sum_j q_j r_{x,j}^2} & -\frac{\Delta x_i}{\sum_j q_j r_{y,j}^2} & 0 \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{\mathrm{L}}}_{GP,i}^T} \begin{bmatrix} U_G \\ V_G \\ W_G \\ \Theta_G \\ \Phi_G \\ \Psi_G \end{bmatrix} \tag{14}$$

$$\Theta_i = \Phi_i = \Psi_i = 0 \tag{15}$$

Tale relazione è definita in forma specifica per ogni nodo P_i.

Alla distribuzione di forza appena descritta è associata la forma agli spostamenti

$$\underline{\delta}_G = \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{\underline{\mathrm{L}}}_{GP,1} & \cdots & \underline{\underline{\mathrm{L}}}_{GP,i} & \cdots & \underline{\underline{\mathrm{L}}}_{GP,n} \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{\mathrm{L}}}_{GP}} \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ v_n \\ w_n \end{bmatrix}}_{\underline{\delta}_{\forall i}} \tag{16}$$

ove $\underline{\underline{\mathrm{L}}}_{GP}$ è definita per blocchi. Tale forma agli spostamenti definisce il moto del baricentro G in funzione del moto dei punti della distribuzione; a titolo di esempio lo spostamento u_G risulta definito dall'Eq.

(16) come

$$u_G = \frac{\sum_i q_i \left\langle [1,0,0], [u_i, v_i, w_i] \right\rangle}{\sum_i q_i} \tag{17}$$

mentre la rotazione ψ_G risulta definita come

$$\psi_G = \frac{\sum_i q_i \left\langle [-\Delta y_i, +\Delta x_i, 0], [u_i, v_i, w_i] \right\rangle}{\sum_i q_i r_{z,i}^2} \tag{18}$$

ove $\langle \cdot, \cdot \rangle$ è il consueto prodotto scalare.

Ambo le forme risultano riconducibili ad una proiezione pesata e normalizzata degli spostamenti dei nodi indipendenti P_i su forme di moto elementari della distribuzione di punti, ad esempio una traslazione x come in (17) o una rotazione (G, z) come in (18). Si può inoltre notare che i numeratori delle (17) e (18) sono forme integrate nel tempo della quantità di moto e del momento della quantità di moto della distribuzione[1], mentre i denominatori sono rispettivamente una massa e un momento d’inerzia.

Ricordando infine la (3) si può infine esprimere per il link RBE3 una condizione cinematica complessiva

$$\underline{\delta}_c = \underline{\underline{\mathrm{L}}}_{CG} \cdot \underline{\underline{\mathrm{L}}}_{GP} \cdot \underline{\delta}_{\forall i} \tag{19}$$

ed una caratteristica di distribuzione delle forze ai nodi P_i

$$\underline{\mathrm{F}}_i = \underline{\underline{\mathrm{L}}}_{GP,i}^T \cdot \underline{\underline{\mathrm{L}}}_{CG}^T \cdot \underline{\mathrm{F}}_C, \quad i = 1 \ldots n. \tag{20}$$

[1] Tali quantità sono integrate da una condizione iniziale scarica/indeformata ad una condizione finale sollecitata/deformata; appaiono infatti gli spostamenti nodali al posto delle velocità nodali.