

Lezione del 14/03/2019

a cura di Miranda A. e Teotonico F.

## Parte finale del taglio

Il problema nasce con una sezione chiusa poiché non riesco a isolare con una sola curva una sezione della trave ma mi servono 2 curve, dalle quali avrò 2 incognite: la  $\tau$  per la prima curva e la  $\tau$  per la seconda curva. Poiché ho una sola equazione di equilibrio in  $z$ , dovrò assumere una delle due  $\tau$  come parametro.

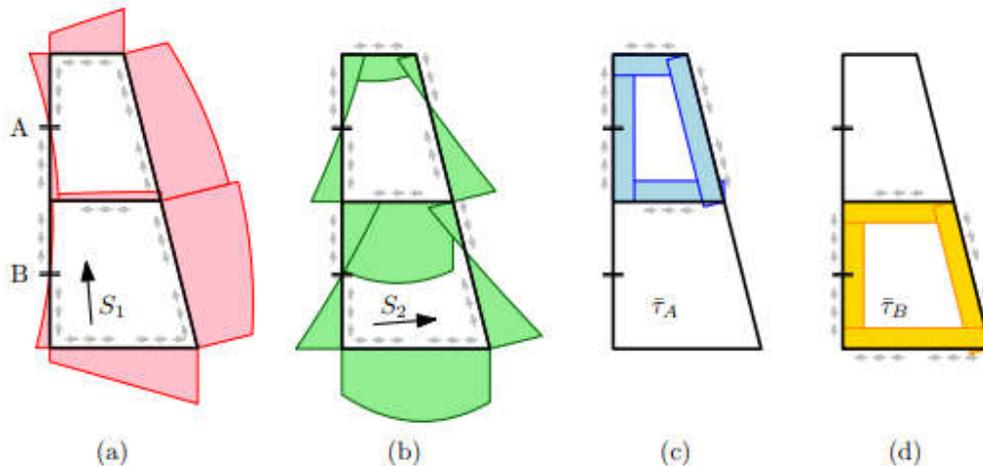


Figura 1

L'equazione di riferimento è la seguente:

$$\bar{\tau}_{zi}(s)t(s) = q(s) = \int_a^s \frac{d\sigma_z}{dz} t d\zeta + \underbrace{\bar{\tau}_{zi}(a)t(a)}_{q_A}.$$

Facendo riferimento alla figura 1.a, ho due sezioni: una fissa nel punto A, l'altra è libera di scorrere lungo un'ascissa curvilinea  $s$  in modo tale da calcolare la  $\tau_{zi}(s)$ .

$\tau_{zi}(s)$ : tensione tagliante media della sezione in  $z$  lungo un'ascissa curvilinea  $s$

$t(s)$ : spessore locale della sezione

$q(s)$ : flusso di taglio

L'integrale fa riferimento alla sezione libera di muoversi lungo un'ascissa, mentre il termine  $q_A$  è noto poiché l'altra sezione è bloccata.

Se la sezione è chiusa dovrò usare quell'equazione con un valore parametrico, ma questo risulta non risolvibile pertanto opero in questo modo:

Immagino di tagliare le pareti della sezione in tanti punti quanto basta per renderla aperta. Riprendo la figura 1.a, quindi taglio la sezione prima nel punto A poi in B così da ottenere un equivalente aperto della sezione chiusa. Su questa sezione posso calcolare l'andamento delle tensioni taglienti  $\tau$  lungo tutto il profilo quando applico un carico di taglio in direzione 1, assunta come direzione principale. La distribuzione dello sforzo di taglio (in rosso figura 1.a) è data dal prodotto dell'area della sezione per 1MPa. Applicando un taglio lungo la direzione 2 (figura 1.b) ottengo un'altra distribuzione dello sforzo di taglio (in verde); devo inoltre tener conto del fatto che nei punti A e B le  $\tau$  sono in genere non nulle. Considero la parete alta  $\Delta z$  (figura 2), effettuo un taglio nel mezzo e ottengo 2 superfici di taglio. Prendo la prima superficie di taglio e applico una tensione tagliante pari a 1 MPa, successivamente prendo la sezione dirimpetto (ruotata per visualizzarla meglio) e applico un'azione tagliante di 1 MPa uguale e contraria in modo tale che ci sia un rapporto di azione e reazione tra le 2 sezioni.

Ho frecce continue (in verde) sulla superficie inferiore e superiore della parete considerata nella sua interezza.

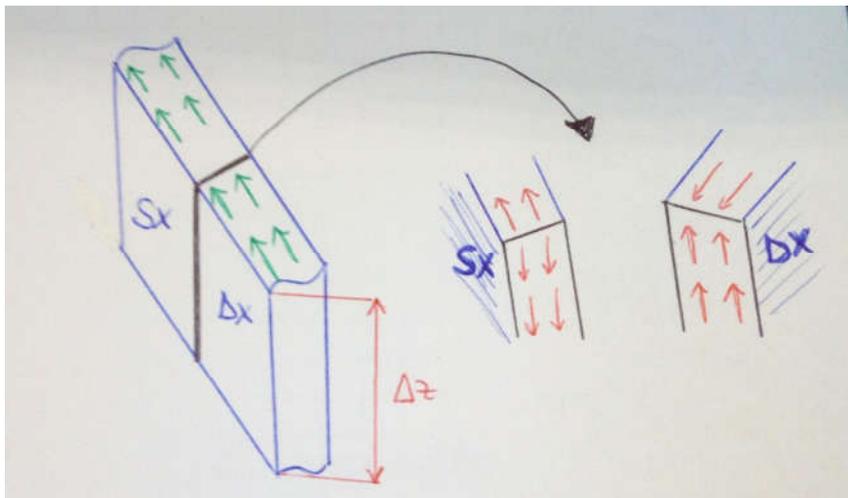


Figura 2

Trovo la distribuzione delle azioni taglienti indotta dalla natura non nulla in A e dalla  $\tau$  non nulla in B.

Pertanto  $\tau_{zi}(s)$  è composto dai seguenti elementi:

La componente di taglio associata alla direzione 1

La componente di taglio associata alla direzione 2

La componente di taglio associata al punto A

La componente di taglio associata al punto B

Compongo i risultati e utilizzando il metodo di sovrapposizione degli effetti posso scrivere che punto per punto lungo la sezione la  $\tau$  è data:

$$\tau(s) = \frac{S_1}{A} f_{;S1}(s) + \frac{S_2}{A} f_{;S2}(s) + \tau_A f_{;A}(s) + \tau_B f_{;B}(s)$$

Sia  $\tau_A$  che  $\tau_B$  sono delle forme di reazione vincolare interna, uso Castigliano. Definisco l'energia potenziale elastica per unità di volume indotta dalla tensione tagliante  $\tau$ :

$$\Delta U = \int_s \frac{\tau^2}{2G_{sz}} t \Delta z ds$$

$\Delta U$ : energia sulla sezione

$G_{sz}$ : modulo di taglio che si sviluppa lungo la linea media

$t$ : spessore locale

$\Delta z$ : altezza concio

$ds$ : estrusione area lungo la linea media della parete del profilo

L'energia potenziale è in funzione di  $S_x$ ,  $S_y$ ,  $\tau_A$  e  $\tau_B$ .

Secondo Castigliano,  $d\Delta U/d\tau_A$  è uguale allo spostamento sul quale  $\tau_A$  compie lavoro.

Prendiamo in considerazione una mensola sulla quale agisce una forza  $F$  (figura 3.A). Tale forza compie lavoro sulla mensola. In accordo con Castigliano  $dU/dF = \delta$ , dove  $\delta$  rappresenta lo spostamento sul quale  $F$  compie lavoro.

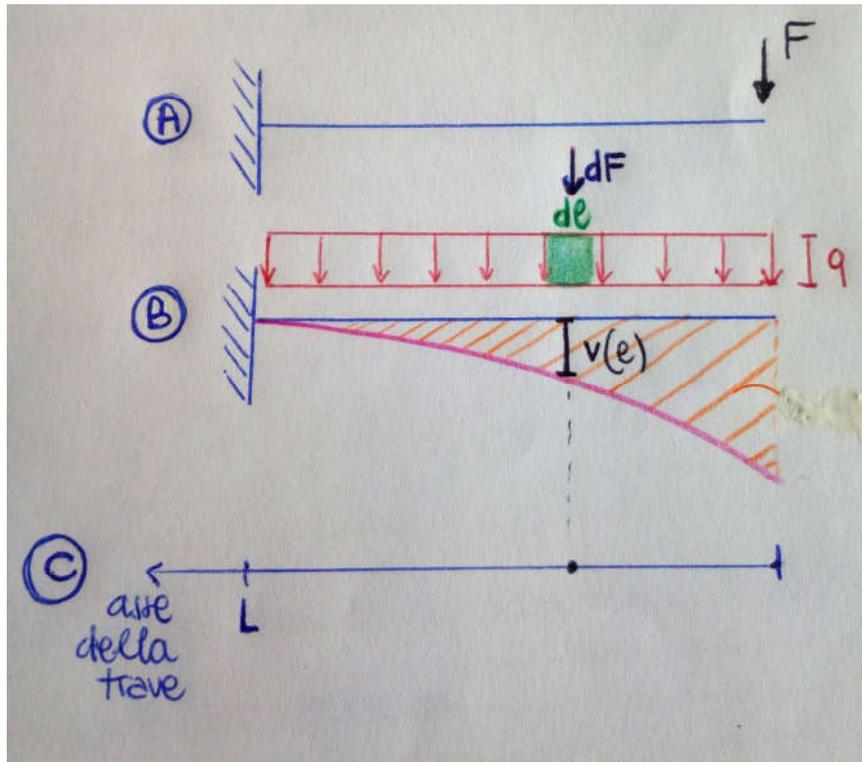


Figura 3

Se ho un carico distribuito  $q$  sulla mensola (NB  $q$  non è un carico su unità di superficie ma è un carico su unità di lunghezza)  $q$  viene definito densità lineica di carico (figura 3.B).

Inoltre,  $dU/dq$  è lo spostamento sul quale  $q$  compie lavoro.

Analizzo la deformata (in fuxia nella figura 3.B).

Isolo una porzione  $dl$  di quell'azione distribuita (in verde Figura 3.B), questa porzione di azione distribuita mi dà una forza pari a :

$$dF = q \cdot dl$$

L'asse della trave rappresentato in 3.C scorre da 0 a  $L$  (lunghezza della trave) e l'abbassamento in corrispondenza della quota  $l$  è una funzione di  $v(l)$  dove  $l$  varia da 0 a  $L$ .

Il lavoro compiuto dalla  $F$  infinitesima è:

$$v(l) \cdot q \cdot dl$$

Integro tutti i contributi infinitesimi e così ottengo l'energia elastica accumulata (il lavoro compiuto è uguale all'energia elastica accumulata):

$$U = \int_0^L v(l)qdl$$

$v(l)$ : cedimento locale (in nero in figura 3.B)

Poiché  $q$  uniforme, posso scrivere:

$$U = q \int_0^L v(l) dl$$

dove:

$$\int_0^L v(l) dl$$

rappresenta l'area spazzata dal suo cedimento rappresentativo ed è rappresentata col colore arancione nella figura 3.B

Avendo dato una forma ad  $U$  allora  $dU/dq$  è uguale all'area spazzata da questa trave nel suo moto deformativo che posso scrivere come:

$$\frac{\partial U}{\partial q} = L \cdot \bar{v}$$

$L$ : lunghezza trave stessa

$\bar{v}$ : inflessione media

quindi il lavoro di una forza lineica distribuita uniforme è uguale alla lunghezza della trave su cui è distribuita per l'inflessione media.

Ora analizzo il caso di una forza distribuita su unità di superficie (caso pressione):

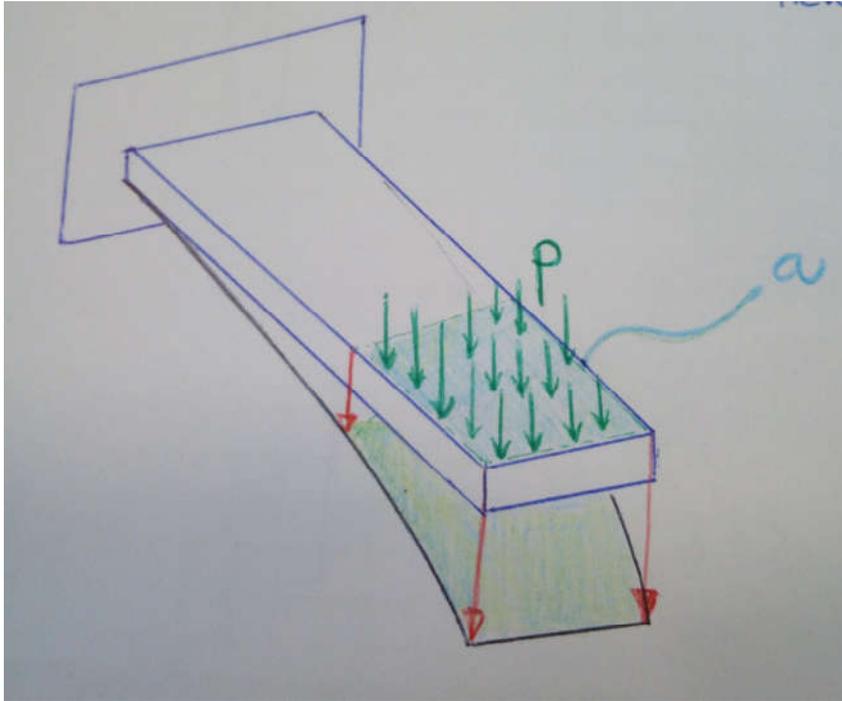


Figura 4

Prendo una trave a sbalzo, sull'area  $a$  (in celeste figura 4) applico una pressione distribuita uniforme  $P$ . Ci sarà un'inflessione di questa lamella, per cui quest'area per via della deflessione si sposterà in verticale. Costruito un sistema di azioni infinitesime simile al caso precedente si ottiene l'energia potenziale elastica pari a:

$$\frac{\partial U}{\partial p} = a \cdot \bar{v}$$

$\bar{v}$ : cedimento medio per l'area  $a$

$a \cdot \bar{v}$  = volume spazzato da questa superficie nel suo moto

Il ragionamento appena fatto per la pressione è valido anche nel caso in cui ci sia una  $\tau$ .

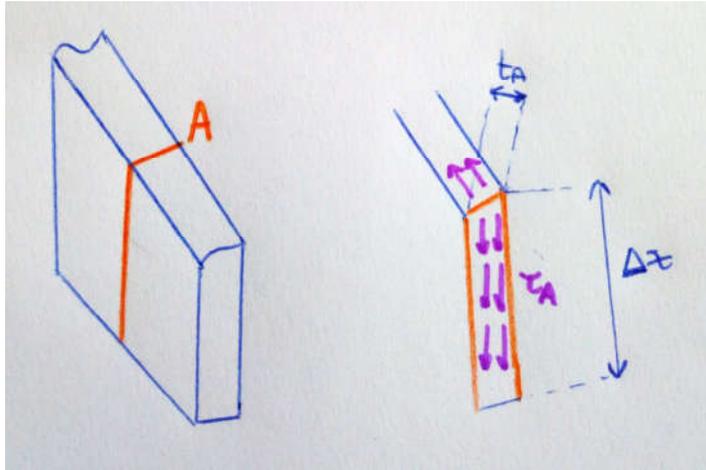


Figura 5

Considero ora la parete (figura 5) sulla quale è presente il punto A, procedo al taglio e considero la prima porzione, su cui è applicata  $\tau_A$ . Se la  $\tau_A$  fosse applicata a una sola faccia otterrei:

$$\frac{\partial \Delta U}{\partial \tau_A} = t_A \cdot \Delta z \cdot \bar{\delta}$$

$t_A$ : spessore locale in A

$\bar{\delta}$ : spostamento medio di una sola faccia

$\Delta z$ : altezza parete

Ma  $\tau_A$  è applicata anche sulla faccia dirimpetta e quindi bisogna analizzare come si comporta Castigliano quando invece di una sola forza applicata a una sezione, ho forze uguali e contrarie che agiscono sulla stessa sezione.

Analizzo il problema considerando la seguente struttura:

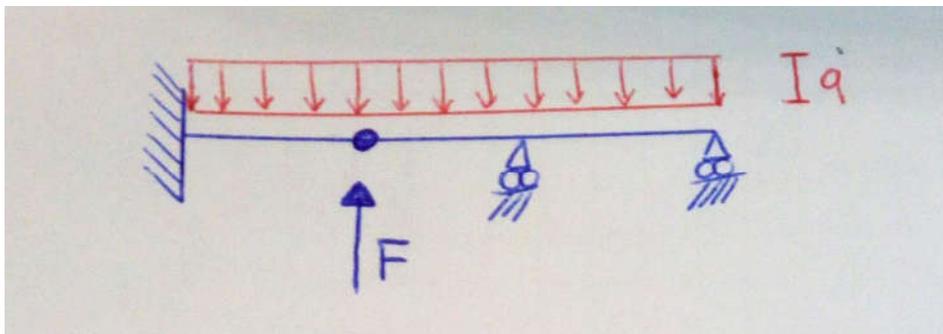


Figura 6

Il caricamento è dato da un'azione distribuita  $q$ . L'obiettivo è quello di conoscere quanto vale la reazione vincolare applicata alla cerniera. La struttura è una volta iperstatica, uso Castigliano e in particolare la reazione iperstatica che posso parametrizzare è la forza  $F$  trasmessa attraverso la cerniera in analisi. Quest'ultima tenderà ad abbassare la sezione di sinistra e la stessa forza  $F$  uguale e contraria agirà sulla sezione di destra. Figura 7

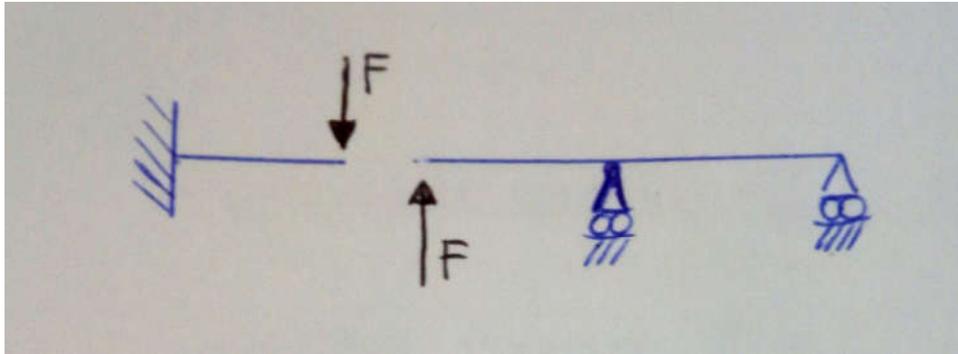


Figura 7

Studio il momento flettente indotto dalla sola azione  $q$  (figura 8).

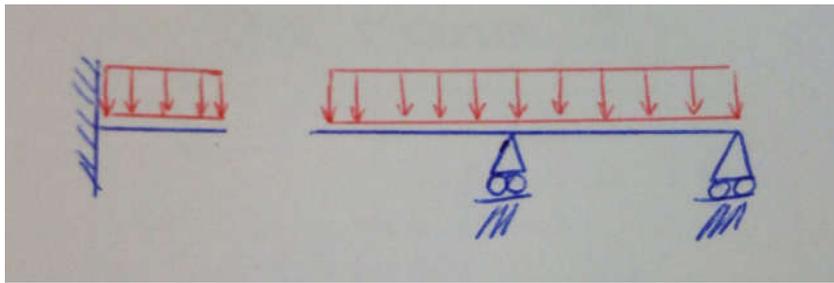


Figura 8

Successivamente considero il momento flettente indotto dalla sola  $F$ . Sommo i due momenti flettenti e integro sulla struttura. Ottengo  $U(q,F)$ , dopodichè posso calcolare  $\partial U/\partial F$ .

Se considero  $F \gg q$  la deformata cumulativa fosse questa:

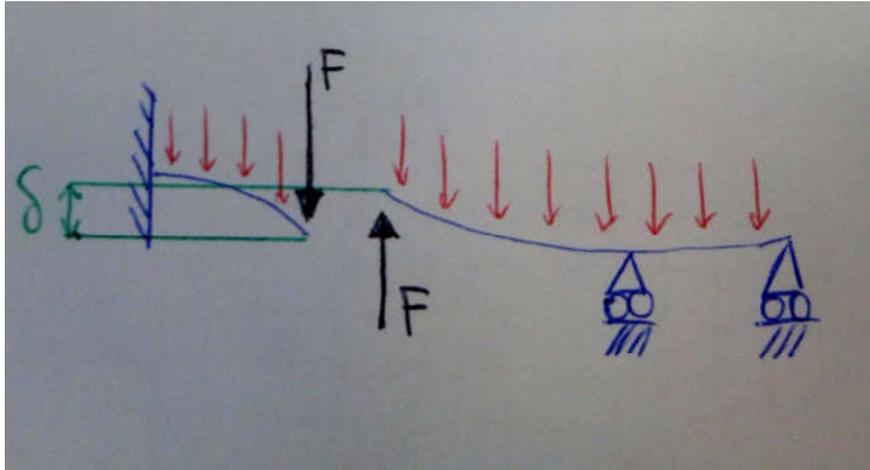


Figura 9

$\delta$  è lo scostamento relativo tra le due sezioni alle quali  $F$  è applicato. Per garantire la continuità dello spostamento verticale in corrispondenza della cerniera, dovrò imporre:

$$\frac{\partial \Delta U}{\partial \tau_A} = t_A \cdot \Delta z \cdot \bar{\delta}$$

Quando  $F$  è una parametrizzazione di una forza interna allora il  $\delta$  rappresenta lo spostamento relativo tra i due conci, l'abbassamento della sezione di sinistra + l'innalzamento della sezione di destra.  $\bar{\delta}$  (in verde figura 9) è uno spostamento relativo medio integrale.

Quando si parla di coppie di sollecitazione uguali e contrarie applicate a un immaginario taglio della struttura, quello che leggo è uno spostamento relativo. Considero il caso delle  $\tau$ :

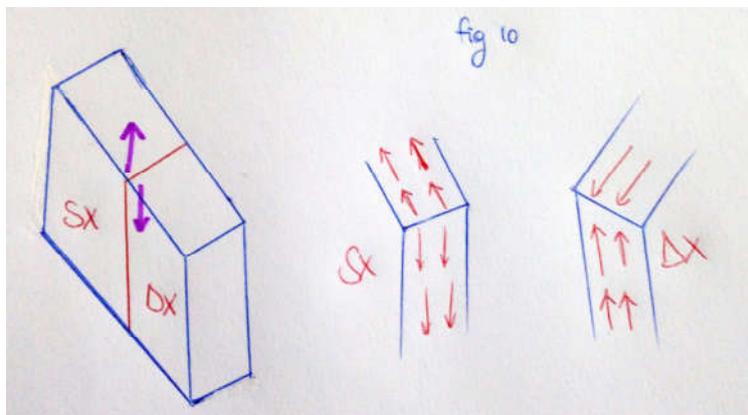


Figura 10

Quando i due carichi sono essenzialmente uguali e contrari attraverso quella sezione, devo garantire almeno in senso medio la continuità del materiale che c'era prima che imponessi il taglio fittizio e impongo:

$$\frac{\partial \Delta U}{\partial \tau_A} = t_A \cdot \Delta z \cdot \bar{\delta}_A = 0$$

Faccio lo stesso ragionamento per la sezione tagliata nel punto B:

$$\frac{\partial \Delta U}{\partial \tau_B} = t_B \cdot \Delta z \cdot \bar{\delta}_B = 0$$

Queste ultime due equazioni hanno due incognite  $\tau_A$  e  $\tau_B$ .

Riprendendo le formule generali:

$$\frac{\partial \Delta U}{\partial \tau_i} = t_i \cdot \Delta z \cdot \bar{\delta}_i$$

il simbolo  $\bar{\delta}_i$  si riferisce al valore medio sull'area  $t\Delta z$  dello spostamento assiale relativo. La continuità del materiale richiede che questo valore sia =0 nel punto di taglio, definendo così un set di equazioni, 1 per ogni parametro  $\tau_A$ ,  $\tau_B$ , ecc.. la cui soluzione porta alla definizione del valore specifico della distribuzione di tensione tagliante lungo il profilo in parete sottile chiusa.

## TORSIONE

Come si muove un materiale in un profilato soggetto a torsione? [DEF:Torsione uniforme: applico ad una trave un momento in direzione assiale e un contromomento dalla parte opposta e nel mezzo il momento torcente è uniforme.

Momento torcente non uniforme: applico una coppia torcente distribuita (per esempio una cinghia di tipo strisciante attorno a una trave a sezione circolare oppure tramite l'applicazione di carichi inerziali).]

La soluzione classica secondo St. Venant per una trave rettilinea a torsione uniforme predilige un campo di spostamenti che è composto da 2 elementi: una rotazione rigida entro piano di una sezione (asse di istantanea rotazione normale al piano stesso) rispetto l'altra e uno spostamento fuori piano delle sezioni.

La rotazione avviene attorno al centro di taglio, salvo che non ci sia taglio. Se impongo a una trave incastrata una rotazione relativa e faccio fulcro su un punto diverso dal centro di taglio ottengo una combo tra momento torcente e taglio, se invece faccio fulcro sul centro di taglio ottengo un momento torcente puro.

Si consideri infatti una trave incernierata con sezione a C. Se si imprime un momento torcente alla struttura, questa ruota rigidamente (spostamento entro piano) attorno all'asse del centro di taglio (TWIST). A questo va aggiunto un secondo movimento (fuori piano), rappresentato da ingobbimenti della sezione.

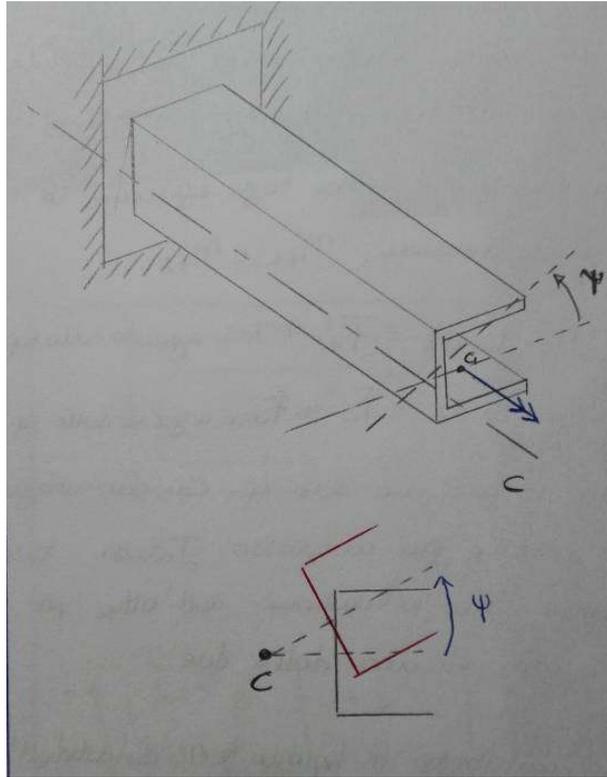


Figura 11

Come faccio ad applicare un momento puramente torcente all'estremità? Di solito con l'uso di una barra all'estremità della struttura. A questa applico 2 forze uguali e opposte ed ottengo che la sezione ruota rigidamente attorno al centro di taglio. In questo modo, il baricentro si abbassa mentre il centro di taglio no. Ho un incremento di rotazione di trave all'aumentare dell'ascissa misurata lungo l'asse della trave.

Quindi entro piano la rotazione è rigida, ma fuori piano c'è un libero spostamento in  $z$ , la sezione si ingobba. C'è un moto di ogni punto della sezione in  $z$  (WARPING).

Se considero diverse sezioni di uno stesso oggetto incrementando  $z$ , il punto  $P$  ha uno specifico moto di warping  $W$  in direzione  $z$ , pertanto  $W$  sarà funzione di  $x$ ,  $y$  ma non di  $z$  poichè tutti i punti associati hanno la stessa quantità di moto in direzione  $z$ . Se il momento torcente è uniforme, le fibre vanno fuori piano senza allungarsi.

Se considero un oggetto con spessore infinitesimo: la rigidità torsionale è nulla ma c'è un alto valore di warping. Questo spostamento di warping è zero solo nel caso di sezioni assialsimmetriche (ad esempio sezioni trasversali circolari piene e vuote eccetto ellittiche oppure sezione con cava per chiavetta).

Se due punti hanno distanza costante e ruotano rigidamente (spostamento omogeneo in  $z$ , non ci sono allungamenti in  $z$  pertanto  $\epsilon_z=0$ ) le componenti di sollecitazione nel piano  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  sono assunte pari a zero, le fibre non si allungano né si accorciano e quindi  $\sigma_z=0$ .

Se il materiale è omogeneo isotropo ed è ortotropo con asse di ortotropia lungo  $z$  allora  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$  e  $\gamma_{xy}$  sono nulle.

Il movimento è limitato internamente solo a causa degli sforzi di taglio fuori dal piano non nulli  $\tau_{yz}$  e  $\tau_{zx}$ , che si sviluppano come una reazione elastica ai componenti di deformazione associati.

Una trattazione più in dettaglio del problema richiede la soluzione di un'equazione differenziale di tipo Laplace piana non omogenea, che non viene trattata durante il corso.

Tuttavia in caso di sezione a parete aperta o chiusa sono disponibili soluzioni semplificate basate sull'assunzione di a) le componenti di taglio fuori piano sono localmente allineate con la sezione media della parete  $\tau_{zr} = 0$  e  $\tau_{zs}$  è l'unica componente di tensione (figura 12) e b) se il materiale è uniforme lungo la parete allora o le  $\tau$  sono costanti nel caso di parete sottile chiusa oppure in caso di sezioni sottili aperte l'andamento delle  $\tau$  è a farfalla. (figura 13)

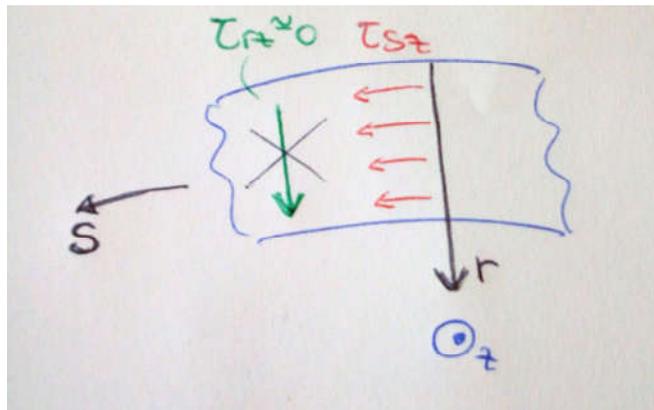


Figura 12

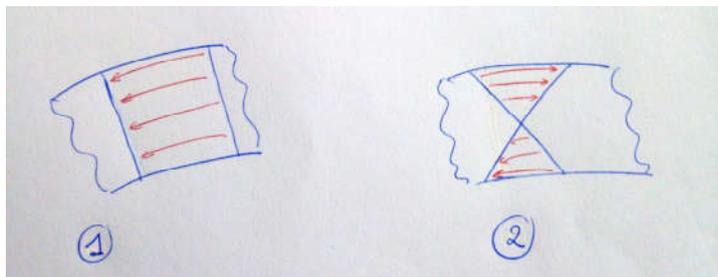


Figura 13

Come per il taglio, anche la torsione varia al variare del tipo della sezione, che può essere aperta o chiusa.

### TORSIONE: Sezione in parete chiusa sottile

La componente di taglio lungo la superficie media  $\tau_{zs}$  è assunta uniforme lungo lo spessore o equivalentemente la sua deviazione dalla media viene trascurata. Nel caso in cui il materiale sia uniforme allora tale  $\tau$  è uniforme, se il materiale non è uniforme tale  $\tau$  varia perché materiale rigido si tensiona di più e ciò che resta uniforme è la deformazione tagliante  $\gamma_{zs}$ . La tensione sarà localmente proporzionale al modulo elastico  $G_{sz}$ .

Considero un concio di concio di trave in sezione sottile chiusa:

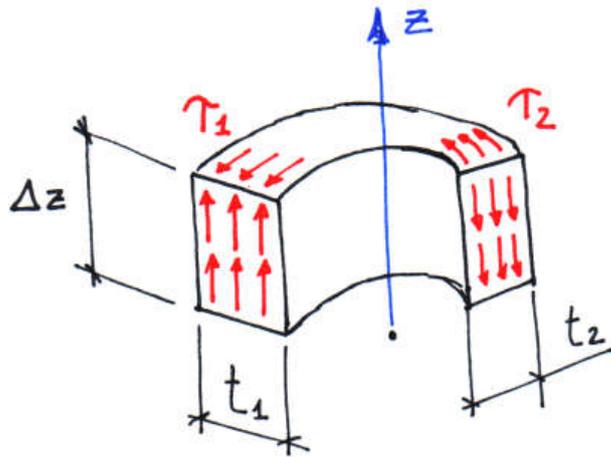


Figura 14

Considero una sezione ellittica soggetta a torsione, la taglio in due sezioni 1 e 2 (figura 14). In corrispondenza dei tagli effettuati sono presenti  $\tau_1$  e  $\tau_2$ , non ci sono variazioni di  $d\phi/dz$ .

Quindi per l'equilibrio alla traslazione verticale:

$$t_1\tau_1 = t_2\tau_2$$

In generale stiamo facendo riferimento a sistemi A SINGOLA CELLA. (figura 15)

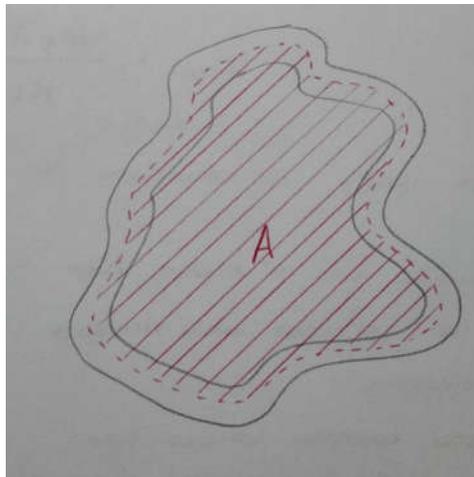


Figura 15

Questo studio avviene tramite la FORMULA DI BREDT. Una per la rigidità, l'altra per lo stato tensionale. La rigidità torsionale della parete sottile chiusa è pari a:

$$K_t = \frac{4A^2}{\oint \frac{1}{t} dl}$$

Questa è pari a quattro volte il contributo quadratico della superficie racchiusa dalla linea media, diviso l'integrale (su l) dell'inverso dello spessore locale; se lo spessore è costante l'integrale circuitale è pari al perimetro diviso lo spessore.

NB L'area non è l'area della sezione ma è l'area interna alla curva media!! (figura 15)

Quest'area è composta da una piccola parte di materiale strutturale e la restante parte di aria. Se la sezione è molto cava allora la rigidezza è data dall'aria. La rigidezza cresce linearmente con lo spessore di parete. La rigidezza è proporzionale allo spessore se costante oppure è proporzionale a un fattore di amplificazione degli spessori punto punto se spessore non costante.

Come varia Kt con l'aumento della dimensione di una sezione a spessore costante? Kt è proporzionale allo spessore per la dimensione caratteristica al cubo.

La  $\tau$  massima si trova nel punto più sottile lungo la parete ed è uguale a :

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{2t_{\min}A}$$

### **TORSIONE: Sezione sottile aperta**

La componente di deformazione tagliante  $\gamma_{zs}$  ( $G_{sz} * \gamma_{zs} = \tau_{zs}$ ) linearmente variabile lungo lo spessore. Se il modulo  $G_{sz}$  è assunto uniforme lungo la parete tale variazione lineare caratterizza anche la componente  $\tau_{zs}$ , se materiale è costante anche  $\tau$  varia linearmente lungo lo spessore ma con media nulla.

Per qualunque forma di sezione molto sottile con materiale uniforme isotropo, allora la rigidezza torsionale è:

$$K_T \approx \frac{1}{3} \int_0^l t^3(s) ds$$

Mentre per spessore costante a tratti:

$$K_T \approx \frac{1}{3} \sum_i l_i t_i^3$$

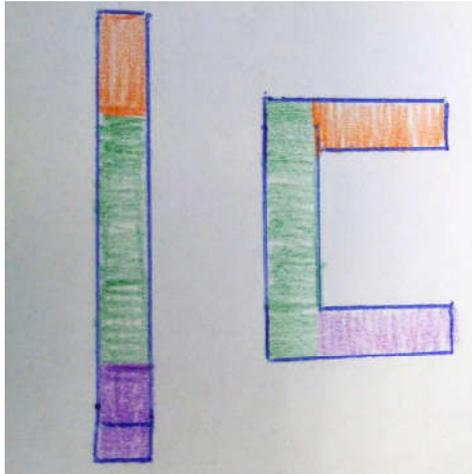


Figura 16

Considerate le due sezioni in figura 16 con uguali lunghezze e uguali spessori esse hanno la stessa rigidità torsionale al di là della forma.

La tensione massima è associata alla sezione in cui lo spessore è massimo ed è pari:

$$\tau_{\max} = \frac{M_t t_{\max}}{K_T}$$

Poiché l'apertura della farfalla delle tensioni è costante, ossia se ho una sezione che si ingrossa, la farfalla delle  $\tau$  è costituita da 2 tratti con pari pendenza. Gli angoli sono uguali nei due tratti, per cui le tensioni le posso disegnare o su un tratto o sull'altro. La pendenza della farfalla è la stessa e quindi dove c'è più spazio la tensione aumenta di più. L'angolo  $\alpha$  è pari a  $M_t/K_t$  (figura 17).

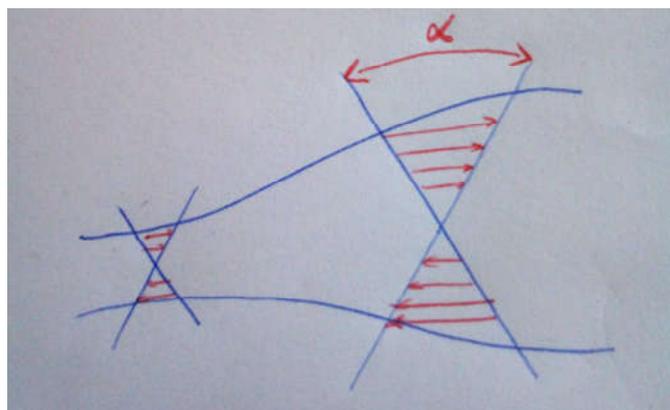


Figura 17

La rigidezza va col cubo dello spessore ed è linearmente proporzionale al perimetro. Per una sezione rettangolare con un rapporto 1/10 tra spessore e lunghezza del muro, la rigidezza torsionale è sovraestimata del 7%.