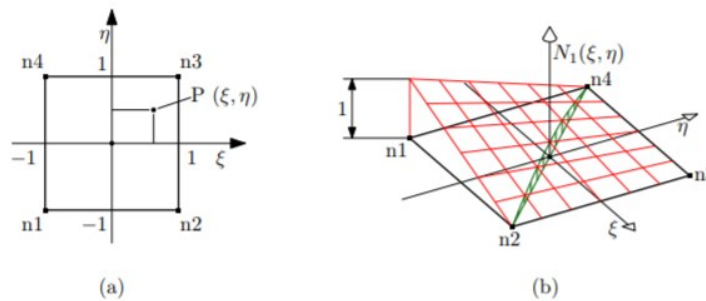


Riepilogo lezione precedente

Nelle precedenti lezioni si erano introdotte le basi per poter approfondire gli elementi finiti: si erano definite le equazioni di interpolazione su un quadrilatero elementare in coordinate adimensionali (ξ, η) comprese tra $(-1, 1)$; si era definita la funzione di mappatura tra il dominio quadrangolare generico sul piano fisico (x, y, z) e la sua controparte sul piano naturale (o di riferimento), che mi permette per ogni punto di coordinate (ξ, η) sul piano di riferimento di estrarre le coordinate (x, y) sul piano fisico, (utilizzata anche nella modellazione FEM).

Questa funzione di mappatura è gestita per interpolazione sul dominio elementare delle funzioni coordinate x e y definite ai quattro nodi. Si sono definite funzioni di forma relative al quadrilatero elementare, le quali assumono valore unitario sui rispettivi nodi e valore nullo sui restanti.



(Figura 1)

La successiva figura (Figura 2), mostra come una funzione forma, è estesa dal dominio naturale a quello fisico. In particolare la figura mostra il dominio fisico della funzione di forma associata al nodo 2 che è pari ad 1, invece nei tre restanti nodi vale 0.

Le funzioni di mappatura sono lineari quando ξ o η sono costanti; questo accade lungo i lati la natura lineare della funzione di mappatura sui lati mi garantisce che un punto preso a coordinate (ξ, η) intermedie tra due nodi (punto di mezzeria) se viene trasformato linearmente dal piano di riferimento a quello fisico, rimarrà mediano in entrambi i piani.

Quindi è la natura lineare della funzione di mappatura sui domini a (ξ, η) costante a garantirmi che l'immagine di un lato rettilineo rimarrà rettilinea. Ciò è provato solo dalla natura lineare della funzione di mappatura lungo i lati.

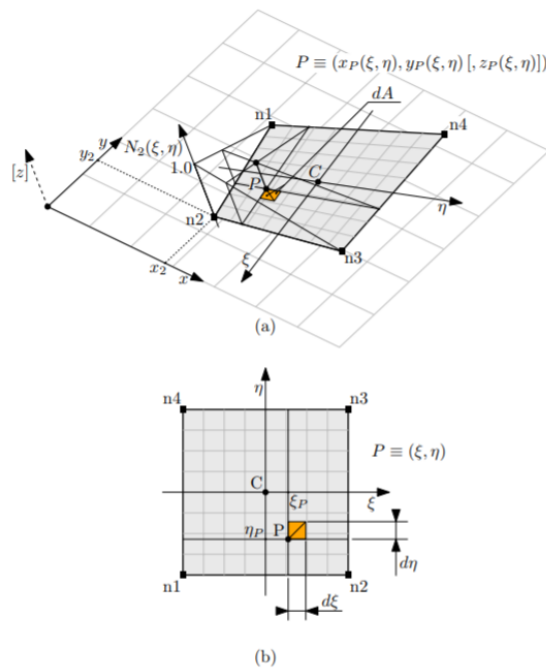
Infatti se si prende una diagonale che congiunge tre punti, in figura 2, il punto uno, il punto tre e il centroide sul piano di riferimento si ottiene un segmento rettilineo. Se prendo lo stesso segmento sul piano fisico trovo che il nodo 1 e il centroide (il segmento che li collega) passa a fianco del nodo tre, i tre punti non sono collineari nel piano fisico. La funzione di mappatura trasforma il segmento rettilineo in un arco che è parabolico e non più rettilineo; nei lati ciò non accade perchè la funzione è lineare

Volendo rappresentare la funzione peso del nodo 2 sul piano fisico, (funzione che vale 1 sul nodo 2 e zero negli altri) vedrò che sul lato 23, 21, 14, etc evolve linearmente.

Se voglio sapere quanto vale questa funzione sul punto P

$$P = (x_p(\xi, \eta), y_p(\xi, \eta), z_p(\xi, \eta))$$

La natura lineare di questa funzione per $(\xi$ o $\eta)$ costanti mi permette di fare costruzioni geometriche.



(Figura 2)

Gli assi (ξ, η) nel piano fisico non sono obbligatoriamente ortogonali, contrariamente al piano di riferimento.

Regole di quadratura gaussiana

Nella precedente lezione si è definito il problema di trovare una regola di quadratura (di stima numerica di un integrale) su un dominio di riferimento.

Abbiamo definito come si procede alla valutazione numerica dell'integrale di una funzione su un intervallo monodimensionale di riferimento, e abbiamo sancito che l'integrale di una funzione è:

$$\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^n f(\xi) \omega_i$$

Dove n sono i punti di campionamento.

n	ξ_i	w_i
1	0	2
2	$\pm \frac{1}{\sqrt{3}}$	1
3	0 $\pm \sqrt{\frac{3}{5}}$	$\frac{8}{9}$ $\frac{5}{9}$
4	$\pm \sqrt{\frac{3}{7} - \frac{2}{7}\sqrt{\frac{6}{5}}}$ $\pm \sqrt{\frac{3}{7} + \frac{2}{7}\sqrt{\frac{6}{5}}}$	$\frac{18+\sqrt{30}}{36}$ $\frac{18-\sqrt{30}}{36}$

La scelta dei punti di campionamento della funzione peso rende la regola di integrazione ottimale per i polinomi, cioè, dati i punti di campionamento valutare l'integrale da -1 a 1, senza errore se la funzione è un polinomio di $n+1$ grado. Questa scelta di punti di integrazione in posizione e peso è ottimale per il polinomio (in generale funziona per tutte le funzioni con errore non nullo).

Si definisce la regola di integrazione di tipo Gaussiana (essendo numerica si chiama quadratura di integrazione), però quando ho la quadratura sui punti selezionati in maniera ottimale per i polinomi, sono regole di quadratura gaussiana ottimale.

Nel mondo FEM si usano regole di quadratura gaussiana per gli elementi utilizzati nel codice, si usano regole di integrazione a grado molto basso (non troviamo elementi integrati con più campionamenti, si tende ad usare delle stime di questi integrali abbastanza grossolani).

I punti di Gauss sono simmetricamente distribuiti lungo gli assi, se il numero di punti di Gauss è dispari; poiché i punti di Gauss devono essere simmetricamente distribuiti, uno dei punti si troverà nell'origine.

I punti di Gauss più lontani all'origine (e più vicini all'estremo dell'segmento) non raggiungono mai l'estremo del segmento, ciò vuol dire (a differenza della regola di Simpson) che i punti estremali non vengono mai usati nella valutazione di quell'integrale, quindi la funzione potrebbe essere discontinua, singolare o più particolare, per cui la funzione non è mai campionata agli estremi e ciò ci permette di definire funzioni sull'intervallo aperto e non sul chiuso.

Restiamo sul monodimensionale ed integriamo sull'intervallo generico (a,b):

$$\int_a^b f(x) dx$$

Definiamo una mappatura tale che quando $\xi = -1, x = a$, e quando $\xi = 1, x = b$. La funzione $f(x)$ si può scegliere anche arbitrariamente complicata, anche se è meglio sceglierla monotona.

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{-1}^1 f(x(\xi)) \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi$$

Si sceglie una funzione lineare $f(x(\xi))$, otteniamo:

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 f\left(\frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} \xi\right) d\xi \approx \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} \xi_i\right) \omega_i$$

A questo punto si ha un integrale definito nell'intervallo $(-1,1)$, nella variabile adimensionale ξ che si può affrontare con le regole Gaussiane definite sull'intervallo di riferimento e successivamente, ridurre tramite mappature ogni intervallo diverso da quello di riferimento a intervallo di riferimento (cambio di variabile)

La funzione f è campionata lungo la coordinata x compresa tra a e b (nei punti strettamente interni all'intervallo). Questi punti sono immagine sull'asse x dei punti di Gauss dell'asse adimensionalizzato.

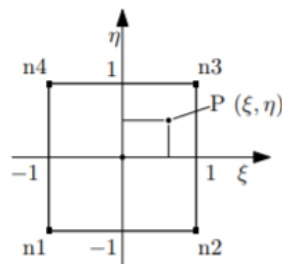
Ad esempio, si consideri una funzione forma di basso grado, scegliamo di operare con due punti di campionamento:

$$\eta=1; \xi_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}; \xi_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}; \omega_1 = 1;$$

La scelta di questo punto di campionamento, rende la regola di integrazione ottimale per i polinomi, nel senso che con quei due punti di integrazione si può valutare l'integrale da -1 a 1 della funzione, senza errore se la funzione è un polinomio di terzo grado.

Nessun'altra regola che conduce a un punto di campionamento riuscirebbe a darci errore nullo per un generico polinomio di terzo grado. Questa scelta di punti di integrazione in posizione e peso è ottimale per il polinomio (in generale funziona per tutte le funzioni con errore non nullo).

Aumentiamo di una dimensione, torniamo sul dominio regolare quadrangolare di riferimento.



Una regola di quadratura per tale dominio di riferimento può essere trovata nidificando due regole di quadrature sul dominimo monodimensionale

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) d\xi d\eta$$

Scegliamo il dominio interno e lo rappresento in termini di sommatoria

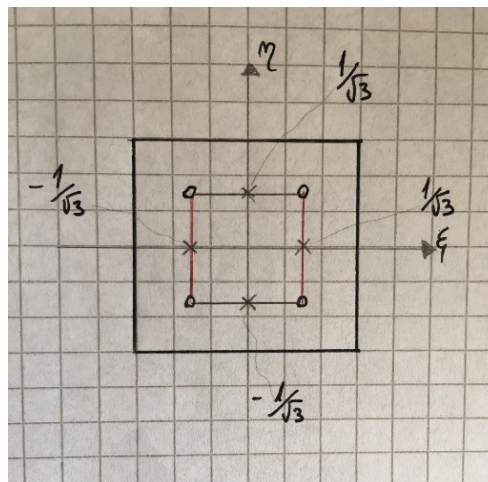
$$\int_{-1}^1 f(\xi, \eta) d\xi d\eta = \int_{-1}^1 \left(\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta) \omega_i \right) d\eta$$

Posso approssimare l'integrale, andando a gestire l'integrazione interna tramite quadratura gaussiana; di fatto preso il mio dominio di riferimento dovrei campionare la funzione su tutto il dominio, per calcolarne l'integrale.

Considerando l'esempio precedente:

I due integrali a scorrimento in η vengono sostanzialmente stimati sulla base dei campionamenti $\xi_1 = +\frac{1}{\sqrt{3}}$ e $\xi_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

E invece di campionare tutto il dominio, campiono solo sui due segmenti rossi le quote ξ , variando η in maniera costante.



(Figura

Nessun punto che non abbia ξ uguale al valore dei due punti di Gauss viene toccato dal campionamento.

Successivamente, vengono studiati due integrali a scorrimento in ξ stimati sulla base dei campionamenti $\eta_1 = +\frac{1}{\sqrt{3}}$ e $\eta_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

A questo punto ho un integrale ξ che va da -1 ad 1, e un secondo integrale η che va da -1 ad 1. Alla fine, si ottiene un campionamento della funzione solo su quattro punti poichè le coordinate coincidono con quelle dei campionamenti sull'intervallo monodimensionale.

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) d\xi d\eta = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q f((\xi_i, \eta_j)) \omega_i \omega_j$$

Abbiamo sostituito l'integrale più interno con una quadratura Gaussiana.

p punti con cui eseguo il campionamento sull'asse ξ .

q punti di campionamento su un asse η .

Otengo infatti un campionamento della funzione su un numero molto ristretto di punti (a p punti e a q punti) per una regola a tre punti campionerò 9 punti per asse, per una regola a due punti campionerò 4 punti per asse.

Se ho un dominio bidimensionale, con quattro punti su quadrilatero e due punti su asse, questo tipo di quadratura con tale densità di campionamento la chiamo regola a 4 punti, due per asse.

Una notazione equivalente sarà:

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) d\xi d\eta = \sum_{l=1}^{pq} f((\xi_l)) \omega_l$$

Il peso associato, è dato dal prodotto dei due pesi, e si considera il peso come se fosse una proprietà del punto e non come se fosse un prodotto di "n" pesi.

Definiamo che la quadratura gaussiana di punti per asse sul dominio in figura è data da quattro punti ξ_l di integrazione le cui coordinate sono combinazione delle coordinate di Gauss su due assi $\{1 \dots pq\} \leftrightarrow \{1 \dots p\} \times \{1 \dots q\}$. "Inventiamo" una nuova numerazione: $l \leftrightarrow (i, j)$ può essere utilizzato per derivare formalmente le coppie di regole di quadratura bidimensionale

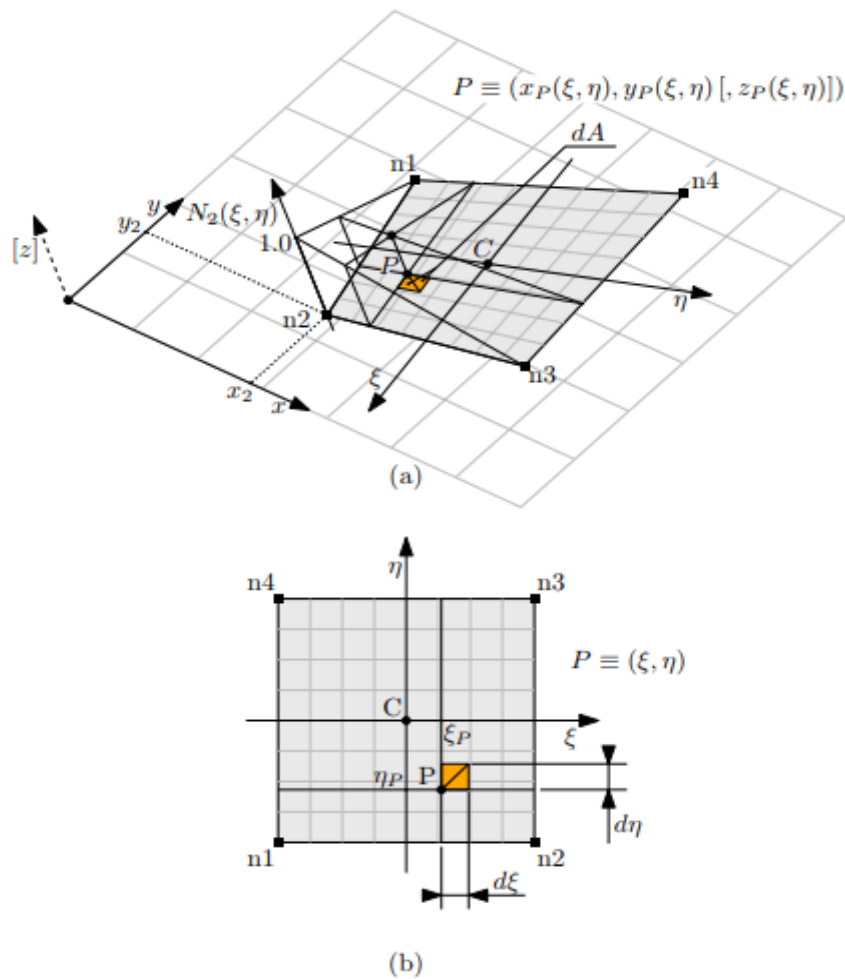
$$\xi_l = (\xi_i, \eta_j); \quad \omega_l = \omega_i \omega_j; \quad l = 1 \dots pq;$$

L'integrazione sul dominio bidimensionale viene fatta o a quattro punti propri del quadrato oppure a due punti per ogni asse. Fondamentalmente è la stessa cosa.

L'estensione su domini 3D è ovvia.

Il problema è dunque riuscire ad integrare una funzione sul dominio quadrilatero arbitrario.

Si effettua un passaggio preventivo, abbastanza breve ma necessario (si riprende la figura 2):



(Figura 2)

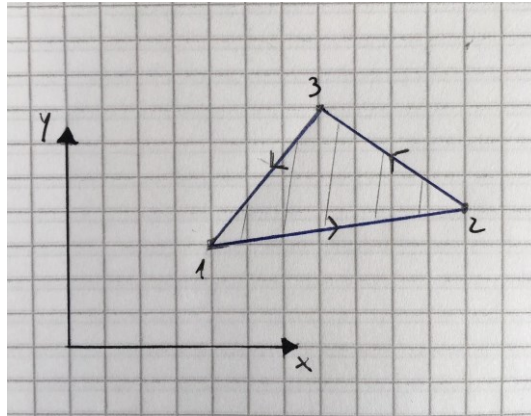
Elemento preliminare è prendere un dato punto P sul dominio di riferimento (b) e considerare un'area infinitesima, nell'intorno del punto P (non centrato), definita:

$$dA_{\xi\eta} = d\xi d\eta$$

Per tale punto possiamo trovare un'immagine sul piano fisico x-y (a). Tuttavia, così com'è stata trovata l'immagine di P, la si avrà anche per gli altri punti del rettangolo elementare in ξ - η , ottenendo una rappresentazione del quadrilatero su x-y con gli stessi margini. L'area dell'immagine viene chiamata dA_{xy} . Tuttavia, è difficile definire l'estensione di tale figura poiché, essendo un quadrilatero arbitrariamente deformato, non esistono realmente formule per la determinazione dell'area.

Si arriva ora alla divisione del quadrato arancione in due triangoli; tale operazione viene effettuata perché risulta molto più semplice definire l'area per tale figura geometrica piuttosto che per un quadrilatero, di natura più complessa.

Preso dunque un piano fisico x - y e definiti 3 punti si orienti il triangolo con circuitazione antioraria:



(Figura 4)

Si conoscono le coordinate $[x_1, x_2, x_3]^T$ e $[y_1, y_2, y_3]^T$; l'area è determinabile grazie al calcolo del determinante (aggiungendo una terza colonna: $[1,1,1]^T$) e dividendo per il numero di dimensioni della figura selezionata (2 per il triangolo, 3 per il tetraedro, ecc...)

$$A = \frac{1}{2!} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

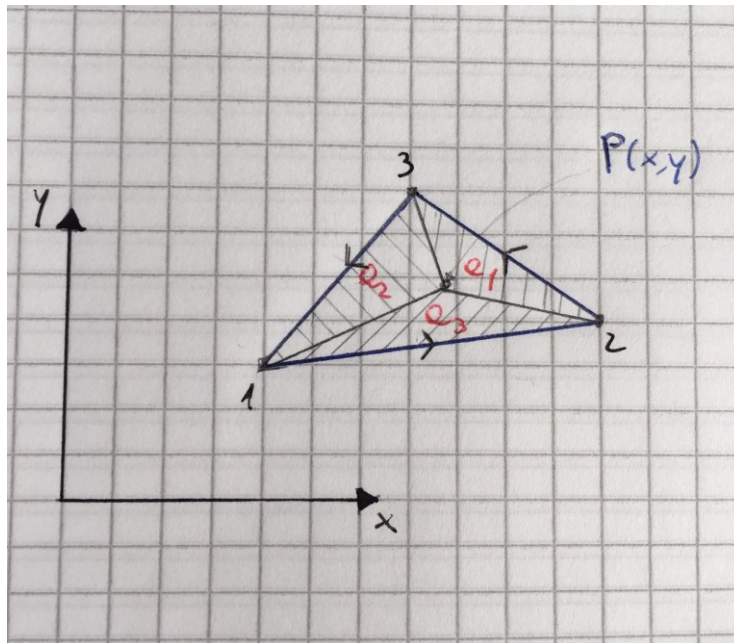
La superficie dell'oggetto sarà uguale a $+A$ se questo avrà orientazione antioraria; a $-A$ se avrà orientazione oraria.

N.B.: Le figure più semplici da costruire per i rispettivi spazi dimensionali (triangolo sul piano, tetraedro nello spazio, ecc...) vengono definiti *simplessi*. Operando come fatto per il triangolo, per un tetraedro si avrà un volume e non un'area; di seguito la rappresentazione generale per n -dimensioni:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{n!} \begin{vmatrix} 1 & \underline{x}_1 \\ 1 & \underline{x}_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & \underline{x}_{n+1} \end{vmatrix}$$

L'utilizzo dei simplessi è abbastanza importante; si supponga una funzione di n -parametri (per esempio $n=2$) campionata in $n+1$ punti.

Nel piano $x-y$ si avranno 3 punti di campionamento e saranno note le funzioni di campionamento f_1, f_2, f_3 nei rispettivi punti.



(Figura 5)

A questo punto, come affrontato per il quadrilatero elementare, un problema è interpolare linearmente i 3 valori per ottenere il valore della funzione in qualsiasi altro punto del dominio, sia interno al triangolo, che esterno. Di conseguenza, preso un punto P di coord. generali (x,y) , voglio sapere qual è il valore della funzione calcolata in quel punto partendo da un'interpolazione lineare di dati noti.

Come visibile in figura, la costruzione geometrica è abbastanza semplice; il modus operandi prevede per prima cosa la costruzione del triangolo che unisce i tre punti di campionamento (sarà importante avere area non nulla = vertici non collineari). Successivamente verranno costruiti altri triangoli collegando il punto P di coordinate (x,y) ai vertici 1,2,3. I tre sottotriangoli ottenuti, sommati, daranno l'area del triangolo macroscopico 1-2-3.

Chiamerò triangolo1 il triangolo che non tocca il nodo 1; triangolo2 quello che non tocca il nodo 2; triangolo3 quello che non tocca il nodo 3. a_1, a_2, a_3 saranno le aree dei rispettivi triangoli.

Riassumendo:

<u>Triangolo macroscopico:</u>	1 2 3	Area: a_{tot}
<u>triangolo1:</u>	P 2 3	Area: a_1
<u>triangolo2:</u>	1 P 3	Area: a_2
<u>triangolo3:</u>	1 2 P	Area: a_3

Se il punto P è interno le aree dei sotto-triangoli saranno positive; se esterno qualcuno avrà area negativa ma la somma:

$$a_{tot} = a_1 + a_2 + a_3$$

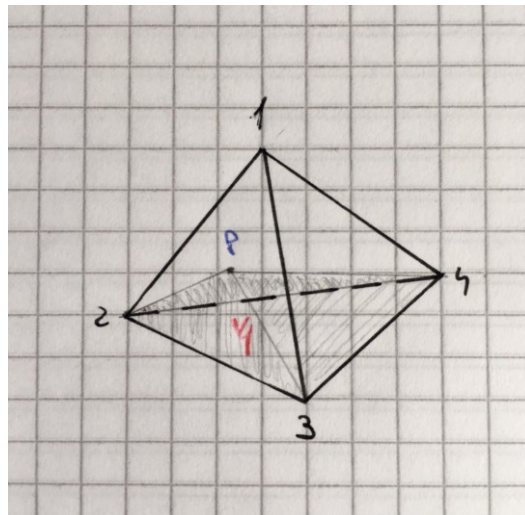
sarà sempre positiva.

In definitiva, l'interpolazione lineare è esprimibile semplicemente dalla formula:

$$f(P) = f_1 \frac{a_1(P)}{a_{tot}} + f_2 \frac{a_2(P)}{a_{tot}} + f_3 \frac{a_3(P)}{a_{tot}}$$

dove $\frac{a_1(P)}{a_{tot}}$, $\frac{a_2(P)}{a_{tot}}$, $\frac{a_3(P)}{a_{tot}}$ sono dei pesi e $a_1(P)$, $a_2(P)$, $a_3(P)$ variano linearmente con le coordinate di P .

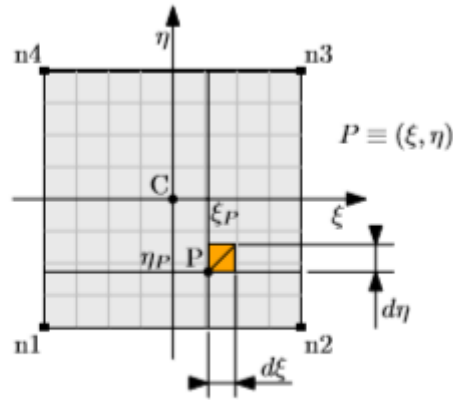
Lo stesso procedimento può essere applicato ad un tetraedro e in generale per n -parametri campionati a $n+1$ punti (in genere non si superano le 8/9 dimensioni, in cui non avrò a che fare con aree ma con volumi):



(Figura 6)

qualora gli $n+1$ punti siano complanari a_{tot} tende a zero.

Si applica, quindi, la formula del determinante per calcolare le aree dei due triangoli infinitesimi sul piano fisico.



(b)

(Figura 7)

Come si nota dalla figura 7: Il primo triangolo è definito da 3 nodi definiti dalle coordinate:

1. $x(\xi_P, \eta_P), y(\xi_P, \eta_P)$ (corrisponde al punto P)
2. $x(\xi_P + d\xi, \eta_P), y(\xi_P + d\xi, \eta_P)$ (il punto P incrementato in ξ di $d\xi$)
3. $x(\xi_P, \eta_P + d\eta), y(\xi_P, \eta_P + d\eta)$ (il punto P incrementato in η di $d\eta$)

Il secondo triangolo è, invece, definito dai 3 nodi di coordinate:

1. $x(\xi_P + d\xi, \eta_P + d\eta), y(\xi_P + d\xi, \eta_P + d\eta)$ (il punto P incrementato in ξ di $d\xi$ e in η di $d\eta$)
2. $x(\xi_P, \eta_P + d\eta), y(\xi_P, \eta_P + d\eta)$ (il punto P incrementato in η di $d\eta$)
3. $x(\xi_P + d\xi, \eta_P), y(\xi_P + d\xi, \eta_P)$ (il punto P incrementato in ξ di $d\xi$)

Si definiscono, quindi, i due triangoli attraverso le coordinate delle immagini dei tre punti. Posso quindi calcolare l'area del quadrilatero come la somma dei due triangoli:

$$dA_{xy} = \frac{1}{2!} \begin{vmatrix} 1 & x(\xi_P, \eta_P) & y(\xi_P, \eta_P) \\ 1 & x(\xi_P + d\xi, \eta_P) & y(\xi_P + d\xi, \eta_P) \\ 1 & x(\xi_P, \eta_P + d\eta) & y(\xi_P, \eta_P + d\eta) \end{vmatrix} + \frac{1}{2!} \begin{vmatrix} 1 & x(\xi_P + d\xi, \eta_P + d\eta) & y(\xi_P + d\xi, \eta_P + d\eta) \\ 1 & x(\xi_P, \eta_P + d\eta) & y(\xi_P, \eta_P + d\eta) \\ 1 & x(\xi_P + d\xi, \eta_P) & y(\xi_P + d\xi, \eta_P) \end{vmatrix}. \quad (20)$$

Essendo $d\xi$ e $d\eta$ piccoli si linearizza x e y attraverso l'espansione in serie di Taylor nell'intorno del punto P. Si ottiene perciò:

$$dA_{xy} \approx \frac{1}{2!} \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x + x_{,\xi}d\xi & y + y_{,\xi}d\xi \\ 1 & x + x_{,\eta}d\eta & y + y_{,\eta}d\eta \end{vmatrix} + \frac{1}{2!} \begin{vmatrix} 1 & x + x_{,\xi}d\xi + x_{,\eta}d\eta & y + y_{,\xi}d\xi + y_{,\eta}d\eta \\ 1 & x + x_{,\eta}d\eta & y + y_{,\eta}d\eta \\ 1 & x + x_{,\xi}d\xi & y + y_{,\xi}d\xi \end{vmatrix}$$

Con $x_{,\xi} = \frac{\partial x}{\partial \xi_P}$, $y_{,\xi} = \frac{\partial y}{\partial \xi_P}$, $x_{,\eta} = \frac{\partial x}{\partial \eta_P}$, $y_{,\eta} = \frac{\partial y}{\partial \eta_P}$;

Si ottiene quindi una formula linearizzata per piccoli $d\xi$ e $d\eta$. Adesso, si applicano delle manipolazioni alle matrici per semplificare il calcolo del determinante (si ottiene lo stesso risultato applicando Sarrus). In particolare:

Per entrambi i determinanti, la prima colonna viene moltiplicata per x_P e sottratta alla seconda colonna, quindi sottratta alla terza colonna una volta moltiplicata per y_P . La prima riga viene quindi sottratta alle altre. Solo sul secondo determinante, sia la seconda che la terza colonna sono cambiate in segno; quindi, la seconda e la terza riga vengono sommate alla prima. I due determinanti sono ora formalmente uguali e sommando $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{2}$ otteniamo l'unità. I fattori $d\xi$ e $d\eta$ possono quindi essere raccolti rispettivamente dalla seconda e dalla terza riga e portati fuori dalla matrice.

Otengo dunque:

$$dA_{xy} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x_{,\xi} & y_{,\xi} \\ 0 & x_{,\eta} & y_{,\eta} \end{vmatrix} d\xi d\eta = \underbrace{\begin{vmatrix} x_{,\xi} & y_{,\xi} \\ x_{,\eta} & y_{,\eta} \end{vmatrix}}_{|J^T(\xi_P, \eta_P)|} dA_{\xi\eta}$$

Con:

$$d\xi d\eta = dA_{\xi\eta}$$

$$\begin{vmatrix} x_{,\xi} & y_{,\xi} \\ x_{,\eta} & y_{,\eta} \end{vmatrix} = |J^T(\xi_P, \eta_P)| \text{ (Jacobiano trasposto al punto della funzione di mappatura)}$$

N.B. Jacobiano trasposto sarà uguale al Jacobiano.

Si ricava perciò che il rapporto dell'area infinitesima sul piano fisico e l'area infinitesima sul piano naturale è uguale al determinante della matrice Jacobiana. Si ottiene dunque che l'integrale sull'area totale in (x,y) (piano fisico) di una funzione $g(x)$ è uguale all'integrale doppio da -1 a 1 di $g(x(\xi,\eta),y(\xi,\eta))$ per il Jacobiano della mappatura.

$$\iint_{A_{xy}} g(x, y) dA_{xy} = \iint_{-1}^1 g(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) |J(\xi, \eta)| d\xi d\eta, \quad (23)$$

Si è, di fatto, operato un cambio di variabile da coordinate (x, y) a (ξ, η) . Si è ridotta una quadratura su un dominio generico alla sua controparte sul dominio naturale già discussa precedentemente.

Si applica, quindi, al dominio di riferimento la quadratura Gaussiana:

$$\iint_{A_{xy}} g(\underline{x}) dA_{xy} \approx \sum_{l=1}^{pq} g(\underline{x}(\underline{\xi}_l)) |J(\underline{\xi}_l)| \omega_l \quad (24)$$

Si prende la posizione di un punto di campionamento $\underline{\xi}_l$, si trova, tramite mappatura, la sua posizione (x, y) sul piano fisico e in quel punto si campiona la funzione (sarà l'immagine del piano fisico dello stesso punto nel piano naturale). Il campionamento si pesa per il peso dello specifico punto di Gauss ω_l e poi per il Jacobiano della mappatura in quel punto.

L'integrale si valuta, quindi, come la sommatoria di campionamenti della funzione alle immagini fisiche dei punti di Gauss sul dominio naturale per un peso adimensionale (la cui somma è sempre 4, ossia l'area del quadrilatero di base) per un'area fisica associata al punto sullo spazio dimensionale (Jacobiano è un'area fisica in mm^2)

Riassumendo, l'integrale definito di un integrando g su un dominio quadrangolare sul piano fisico (x, y) (nel caso specifico si trattano grandezze dimensionali (lunghezze)) può essere valutato come segue:

1. Si definisce una mappatura dal dominio di riferimento al dominio fisico, che può essere basata sull'interpolazione delle coordinate fisiche dei nodi;
2. Tale funzione è campionata alle posizioni sullo spazio fisico, che sono immagini dei punti d'integrazione di Gauss precedentemente ottenuti sul dominio di riferimento;
3. Viene eseguita una somma pesata dei campionamenti, dove il peso consiste nel prodotto di: 1) il peso adimensionale associato al punto di Gauss che gestisce l'influenza di quel punto sul dominio di riferimento; 2) una scalatura di area dimensionale che coincide con il determinante della matrice Jacobiana della trasformazione valutato localmente nei punti di Gauss (nel piano naturale);

“The bilinear isoparametric shear-deformable shell element (Mark: Vol.B pag. 406, element 75)”

E' un quadrilatero a quattro nodi (non ci sono nodi di centro lato), thick-shell ossia formulazione non alla kirchhoff (c'è deformazione a taglio fuori piano) i cui gradi di libertà sono spostamenti e rotazioni globali. Viene usata un'interpolazione lineare per le coordinate

(date le coordinate dei nodi ricaviamo le coordinate dei punti interni tramite interpolazione bilineare), per il campo degli spostamenti e per il campo delle rotazioni trattate come entità indipendenti. Le deformazioni membranali sono ottenute dal campo degli spostamenti ($\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$); allo stesso modo le curvature sono ottenute dal campo delle rotazioni (derivando le rotazioni).

Una volta ricordati i prerequisiti algebrici, si riporta la definizione di un elemento quadrilatero a interpolazione bilineare isoparametrico deformabile al taglio.

N.B Si definisce isoparametrico quando la stessa legge di interpolazione bilineare viene utilizzata per calcolare la posizione dei nodi, degli spostamenti e rotazione. Ormai tutti gli elementi finiti sono trattati come isoparametrici. Nonostante diverse trattazioni negli anni '70 gli elementi subparametrici o superparametrici non sono, praticamente, più usati.

Esso è definito univocamente dalla posizione dello spazio dei suoi 4 vertici che costituiscono un set di punti nodali, ossia, un set di posizioni nello spazio nelle quali le componenti di spostamenti e rotazione vengono definite parametricamente. Essendoci 6 gdl per ogni nodo roto-traslante il quadrilatero è definito da un totale di 24 gdl. Tutti gli spostamenti dei punti interni sono dipendenti da quei 24 gdl perché derivati per interpolazione (ad esempio il centroide roto-traslerà come la media dei 4 nodi). L'interpolazione è quindi utilizzata per ricavare i valori in tutti i punti che non sono i nodi.

Uno schema d'interpolazione adatto, definito bilineare, è stato introdotto precedentemente; le cui funzioni di forma sono definite sulla base di due coordinate normalizzate $\xi, \eta \in [-1,1]$ che scorrono sull'area dell'elemento sul piano di riferimento.

Un sistema di riferimento globale OXYZ serve perché non posso avere un asse z uscente su ogni elemento (ad esempio in una sfera). Si utilizza quando si analizzano più elementi. Ogni elemento avrà un suo sistema di riferimento locale Cxyz (con z uscente) si utilizza, invece, quando si analizza il singolo elemento le cui coordinate dei nodi definiscono la geometria iniziale (indeformata). Una volta definite le posizioni nello spazio dei quattro nodi le coordinate spaziali di tutti gli altri punti possono essere ottenute utilizzando l'interpolazione bilineare note le coordinate del punto nel piano naturale (ξ, η). In particolare, il centroide C (origine del sistema mobile) è l'immagine nello spazio fisico del punto a coordinate naturali $\xi=0, \eta=0$ nel piano di riferimento.