Lezione del 2 aprile 2019

A cura di:
Piergiacomo Losurdo, Gianluca Possemato, Pietro Vorini

5 maggio 2019

Indice

Nomenclature

(ξ, η) Coordinate di un punto nel dominio elementare (o naturale)

(x, y) Coordinate di un punto nel dominio fisico

δ_{ij} Delta di Kronecker ($\delta_{ij} = 1 \quad \text{se} \quad i = j, \quad \delta_{ij} = 0$ altrimenti)

$\underline{\underline{J}}(\underline{x}(\underline{\xi}))$ Matrice Jacobiana della funzione $\underline{x}(\underline{\xi})$

$f(\xi, \eta)$ Funzione interpolante

f_g Valore della funzione nodale nel centroide

$N_i(\xi, \eta)$ Funzioni di influenza nodale (o funzioni peso)

r Residuo integrale

w_i Peso del nodo i-esimo

1 Funzione interpolante

1.1 Definizione

Si consideri un quadrato elementare avente i nodi coincidenti con i vertici e si definisca una *funzione interpolante* $f(\xi, \eta)$ sul piano adimensionale (ξ, η). Questa funzione interpola i valori ai nodi f_i pesati secondo specifiche *funzioni di influenza nodale*, in maniera tale da ottenere il valore di un generico punto $P(\xi, \eta)$:

$$f(\xi, \eta) := \sum_i N_i(\xi, \eta) f_i \tag{1}$$

Tali *funzioni di influenza nodale* devono verificare i seguenti requisiti:

- rispettare la seguente relazione:
$$N_i(\xi_j, \eta_j) = \delta_{ij} \tag{2}$$
dove con δ_{ij} si intende la delta di Kronecker;
- in ogni punto del dominio la somma dei pesi deve essere unitaria:
$$\sum_i N_i(\xi, \eta) = 1, \quad \forall [\xi, \eta] \tag{3}$$

Le funzioni polinomiali di basso ordine si prestano bene ad essere utilizzate come N_i, in quanto sono funzioni di classe $\mathcal{C}^\infty$ e di semplice derivazione.
Nel caso specifico, si adopera la seguente funzione:

$$N_i(\xi, \eta) := \frac{1}{4}(1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta) \tag{4}$$

dove, facendo riferimento alla fig. 1, (ξ_i, η_i) sono le coordinate del nodo i-esimo.
Dall'eq. 4 risulta immediato notare l'assenza di termini quadratici nelle sole incognite ξ o η. Infatti la stessa può essere riscritta nella seguente maniera (forma lineare completa, con l'aggiunta di un termine quadratico misto):

$$N_i(\xi, \eta) = a_1 + a_2 \xi + a_3 \eta + a_4 \xi \eta \tag{5}$$

dove:

$$a_1 = \frac{1}{4} \tag{6a}$$

$$a_2 = \frac{1}{4}\xi_i \tag{6b}$$

$$a_3 = \frac{1}{4}\eta_i \tag{6c}$$

$$a_4 = \frac{1}{4}\xi_i \eta_i \tag{6d}$$

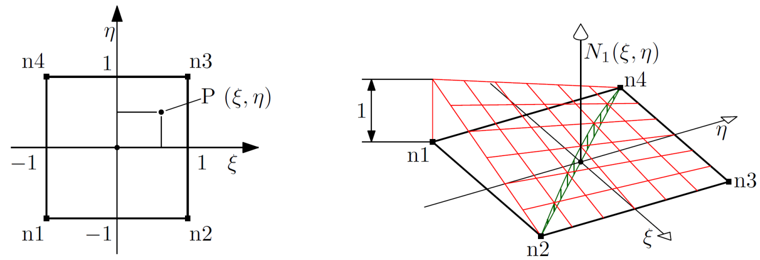

Figura 1

Si può notare che la funzione N_i (quindi anche la funzione f) è bilineare: mantenendo $\xi = cost$ oppure $\eta = cost$ la funzione è lineare nella variabile lasciata libera. Invece, lasciando entrambe le variabili libere, la funzione possiede anche il termine quadratico misto $a_4\xi\eta$.
Data allora la linearità delle funzioni N_i sui bordi del quadrato elementare e lungo gli assi $\xi = cost$ ed $\eta = cost$, in un qualsiasi punto del quadrato elementare si può calcolare il valore di N_i (da cui il valore di f) applicando la regola della leva mantenendo costante prima una variabile e poi l'altra. In particolare, per trovare il valore di un punto su un bordo si svolge il procedimento mostrato in fig. 2.

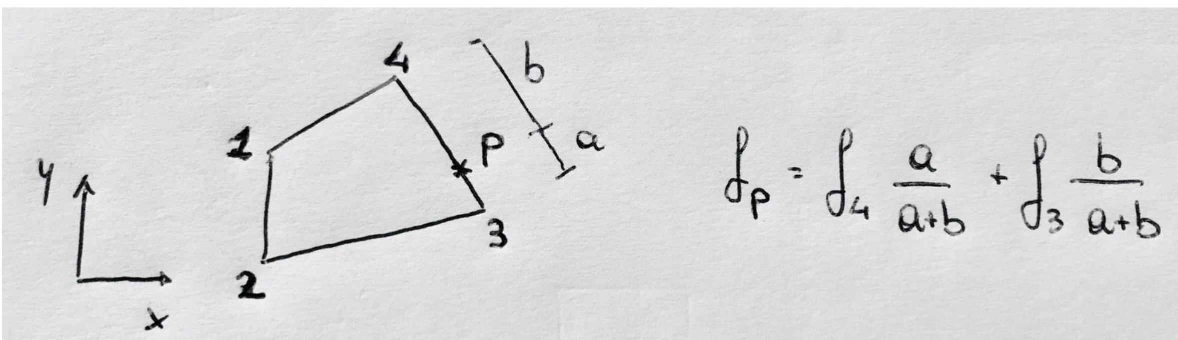

Figura 2: Valore di f in un punto sul bordo

Osservando la fig. 3, risulta $N_i = 1/4$ nel centroide (verificabile anche sostituendo nell'eq. 4 i valori $\xi = 0$, $\eta = 0$). Si deriva allora immediatamente dall'eq. 1 il valore di f nel centroide:

$$f_g = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} f_i \tag{7}$$

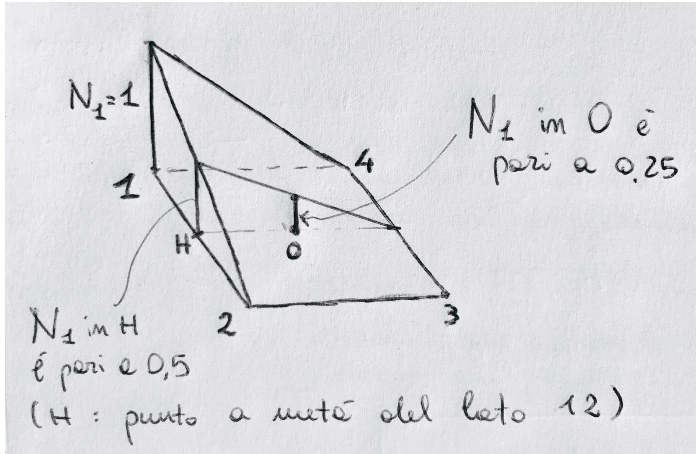

Figura 3: Rappresentazione della funzione peso N_1

1.2 Derivate parziali

A partire dall'eq. 1 si possono determinare le derivate parziali nel piano (ξ, η):

$$\frac{\partial f(\xi,\eta)}{\partial \xi} = \sum_i \frac{\partial N_i(\xi,\eta)}{\partial \xi} f_i \tag{8a}$$

$$\frac{\partial f(\xi,\eta)}{\partial \eta} = \sum_i \frac{\partial N_i(\xi,\eta)}{\partial \eta} f_i \tag{8b}$$

ottenendo dunque le relazioni:

$$\frac{\partial f(\xi,\eta)}{\partial \xi} = \left(\frac{f_2 - f_1}{2}\right)\left(\frac{1-\eta}{2}\right) + \left(\frac{f_3 - f_4}{2}\right)\left(\frac{1+\eta}{2}\right) \tag{9a}$$

$$\frac{\partial f(\xi,\eta)}{\partial \eta} = \left(\frac{f_4 - f_1}{2}\right)\left(\frac{1-\xi}{2}\right) + \left(\frac{f_3 - f_2}{2}\right)\left(\frac{1+\xi}{2}\right) \tag{9b}$$

Risulta evidente che tali derivate possono essere espresse nella forma lineare in η e ξ rispettivamente:

$$\frac{\partial f(\xi,\eta)}{\partial \xi} = a\eta + b \tag{10a}$$

$$\frac{\partial f(\xi,\eta)}{\partial \eta} = c\xi + d \tag{10b}$$

dove, in generale, a e c sono legate tra di loro, mentre nel caso specifico sono uguali:

$$a = c = \frac{1}{4}\left[f_1 - f_2 + f_3 - f_4\right] \tag{11a}$$

$$b = \frac{1}{4}\left[-f_1 + f_2 + f_3 - f_4\right] \tag{11b}$$

$$d = \frac{1}{4}\left[-f_1 - f_2 + f_3 + f_4\right] \tag{11c}$$

2 Dominio quadrilatero generale

Generalmente un dominio fisico non è rappresentato da un quadrato, ma può essere riconducibile ad uno elementare di riferimento mediante un'apposita funzione. Nel seguito verranno adoperate dunque le variabili (x, y) per indicare un punto appartenente al *dominio fisico* e le varabili (ξ, η) per indicare un punto appartenente al *dominio elementare* (o *naturale*). Dunque non verranno mai utilizzate (x, y) come variabili indipendenti, bensì (ξ, η).
Per prima cosa si definisce la relazione tra i vertici del dominio fisico con quelli del piano elementare; a partire da questi valori si può ricavare una mappatura dei punti interni tramite interpolazione:

$$\underline{x}(\underline{\xi}) = \underline{m}(\underline{\xi}) = \sum_{i=1}^{4} N_i(\underline{\xi})\underline{x}_i \tag{12}$$

dove si sono utilizzati i seguenti vettori:

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \qquad \underline{\xi} = \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} \tag{13}$$

e la funzione $\underline{m}(\underline{\xi})$ è definita *funzione di mappatura.*
L'invertibilità della funzione $\underline{m}(\underline{x})$ non è sempre garantita: infatti nel caso di un quadrilatero degenere (un lato di lunghezza nulla) non si ha una corrispondenza biunivoca sul lato di lunghezza nulla e dunque la funzione non è invertibile; un'altra situazione in cui $\underline{m}(\underline{x})$ non è biunivoca ovunque è il caso di lati incrociati nel dominio fisico: il punto di intersezione dei lati corrisponde, nel dominio naturale, ad un intero segmento. Entrambi i casi sono osservabili in fig. 4.

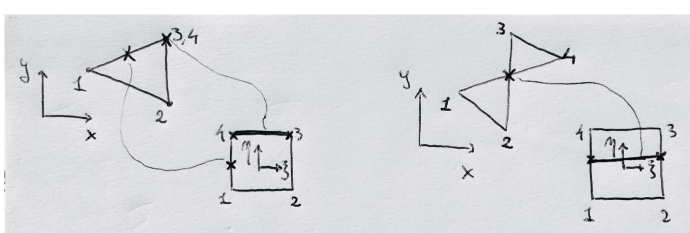

Figura 4: Situazioni di non invertibilità della funzione di mappatura

Nel paragrafo 1.2 sono state determinate la funzione di interpolazione e le sue derivate parziali nel piano naturale. Si vogliono ora ottenere le derivate parziali della funzione f rispetto alle coordinate (x, y), di maggior interesse pratico, per conoscerne l'andamento nel dominio fisico.
Dalla regola di derivazione a catena si può scrivere:

$$\frac{\partial f}{\partial \xi} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \xi} \tag{14a}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \eta} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \eta} \tag{14b}$$

Dalle formule 8 si ricavano anche le derivate parziali di x e y rispetto ad ξ ed η (sostituendo f_i con x_i e y_i rispettivamente). Uniche incognite delle eq. 14 sono le derivate parziali di f rispetto ad x ed y. Queste si ottengono mettendo le due relazioni a sistema:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \xi} \\ \frac{\partial f}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix} \tag{15}$$

La matrice dei coefficienti corrisponde alla trasposta della Jacobiana della funzione di mappatura $\underline{m}(\underline{\xi})$:

$$\underline{\underline{J}}^T(\underline{x}(\underline{\xi})) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \tag{16}$$

Tale matrice deve essere non singolare ($|\underline{\underline{J}}| \neq 0$) per essere invertita; se questa dovesse risultare singolare, non si potrebbe procedere al calcolo delle incognite.
La matrice Jacobiana risulta singolare quando salta la natura biunivoca della funzione di mappatura $\underline{m}(\underline{\xi})$. Come precedentemente mostrato questo avviene nel caso di quadrilatero degenere o di quadrilatero con lati che si intersecano.
Si ottiene così il vettore delle derivate cercato:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix} = \left[\underline{\underline{J}}^T(\underline{x}(\underline{\xi}))\right]^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} \dots \frac{\partial N_4}{\partial \xi} \\ \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} \dots \frac{\partial N_1}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ : \\ f_4 \end{bmatrix} \tag{17}$$

3 Regole di quadratura gaussiana

Si vuole calcolare ora il volume sotteso ad una data superficie nel dominio fisico:

$$\iint_a f(x, y) da \tag{18}$$

essendo a la superficie illustrata in fig. 5. Tale integrale verrà calcolato per via numerica mediante quadratura.

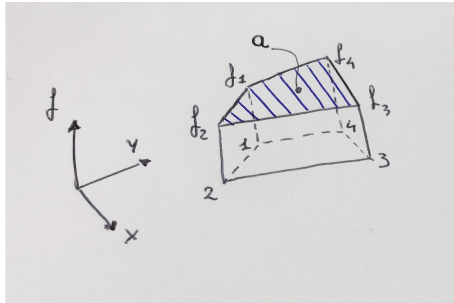

Figura 5

3.1 Dominio monodimensionale

Si analizza inizialmente il caso di dominii monodimensionali: in questo caso la regola di quadratura gaussiana ci consente di approssimare un integrale definito su di un intervallo $\xi \in [-1, 1]$ nel seguente modo:

$$\int_{-1}^{1} f(\xi) d\xi \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) w_i \tag{19}$$

L'arrotondamento considerato consiste nella somma pesata dei valori della funzione in corrispondenza dei punti di campionamento interni all'intervallo. Questa regola di quadratura risulta esatta per alcuni polinomi (si rammenta che le funzioni peso $N_i(\underline{\xi})$, dalle quali dipende la funzione mappatura, si scelgono generalmente polinomiali).
Si consideri allora un generico polinomio di grado m:

$$p(\xi) = \sum_{j=0}^{m} a_j \xi^j$$

il cui integrale esatto sul dominio considerato vale:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} p(\xi) d\xi &= \int_{-1}^{1} \sum_{j=0}^{m} a_j \xi^j = \\ &= \sum_{j=0}^{m} \int_{-1}^{1} a_j \xi^j = \sum_{j=0}^{m} a_j \left. \frac{\xi^{j+1}}{j+1} \right|_{\xi=-1}^{\xi=1} = \\ &= \sum_{j=0}^{m} a_j \frac{(-1)^j + 1}{j+1} \end{aligned}$$

Si definisce nel seguente modo il *residuo integrale* tra il valore esatto e la somma pesata:

$$r(a_j, (\xi_i, w_i)) := \sum_{i=1}^{n} p(\xi_i) w_i - \int_{-1}^{1} p(\xi) d\xi \tag{21}$$

Osservando i due termini presenti in questa definizione (sviluppati nelle precedenti equazioni), si osserva che il residuo può essere riscritto come segue:

$$r(a_j, (\xi_i, w_i)) = \sum_{j=0}^{m} a_j \beta_j(\xi_i, w_i) \tag{22}$$

dove i coefficienti β_j sono termini dipendenti dai punti di campionamento.
Condizione di ottimalità per la regola di quadratura, dato un polinomio di grado m, risulta la seguente:

1. $r = 0 \quad \forall\, a_j$

2. La condizione 1 non deve valere per nessuna regola di quadratura con n minore (ovvero $r \neq 0$)

Naturalmente la condizione di residuo nullo è soddisfatta se si considerano $a_1 = ... = a_m = 0$. Data l'eq. 22 e notando la sua linearità rispetto ai termini a_j, per eliminare la dipendenza da detti termini si deriva il residuo nel seguente modo:

$$\frac{\partial r(a_j, (\xi_i, w_i))}{\partial a_j} = 0 \qquad \text{per} \qquad j = 0, ..., m \tag{23}$$

Il sistema che si ottiene presenta $m + 1$ equazioni, indipendenti dalle costanti a_j, nelle $2n$ incognite (ξ_i, w_i) per $i = 1, .., n$. I valori di (ξ_i, w_i) che si ottengono annullano il residuo integrale in maniera indipendente dalle a_j. Dunque una regola con n punti di campionamento calcola esattamente il valore dell'integrale (presentando residuo nullo) se $m = 2n - 1$.

Si fornisce ora un esempio di quadratura gaussiana per $n = 2$, $m = 2n - 1 = 3$:

$$p(\xi) = a_3\xi^3 + a_2\xi^2 + a_1\xi + a_0, \qquad \int_{-1}^{1} p(\xi)d\xi = \frac{2}{3}a_2 + 2a_0 \tag{24}$$

Il residuo integrale ottenuto risulta:

$$\begin{aligned} r &= p(\xi_1)w_1 + p(\xi_2)w_2 - \frac{2}{3}a_2 + 2a_0 = \\ &= a_3\left(w_1\xi_1^3 + w_2\xi_2^3\right) + a_2\left(w_1\xi_1^2 + w_2\xi_2^2 - \frac{2}{3}\right) + a_1\left(w_1\xi_1 + w_2\xi_2\right) + a_0(w_1 + w_2 - 2) \end{aligned} \tag{25}$$

La derivazione rispetto ai coefficienti a_j fornisce il seguente sistema:

$$\begin{cases} \frac{\partial r}{\partial a_3} = 0 = w_1\xi_1^3 + w_2\xi_2^3 \\ \frac{\partial r}{\partial a_2} = 0 = w_1\xi_1^2 + w_2\xi_2^2 - \frac{2}{3} \\ \frac{\partial r}{\partial a_1} = 0 = w_1\xi_1 + w_2\xi_2 \\ \frac{\partial r}{\partial a_0} = 0 = w_1 + w_2 - 2 \end{cases}$$

Risolvendo si ottengono le posizioni dei punti di campionamento ξ_i e i rispettivi pesi w_i:

$$\xi_{1,2} = \pm\frac{1}{3}, \qquad w_1 = w_2 = 1 \tag{26}$$

Procedendo in maniera analoga per differenti valori di n si ottengono i risultati mostrati in Tab. 1.

n	ξ_i	w_i
1	0	2
2	$\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$	1
3	0	$\frac{8}{9}$
	$\pm\sqrt{\frac{3}{5}}$	$\frac{5}{9}$
4	$\pm\sqrt{\frac{3}{7}-\frac{2}{7}\sqrt{\frac{6}{5}}}$	$\frac{18+\sqrt{30}}{36}$
	$\pm\sqrt{\frac{3}{7}+\frac{2}{7}\sqrt{\frac{6}{5}}}$	$\frac{18-\sqrt{30}}{36}$

Tabella 1: Regole di quadratura gaussiana per metodi di ordine basso

Si nota che i punti di integrazione sono simmetrici rispetto all'origine e che non sono posizionati mai all'estremità dell'intervallo, consentendo così di integrare funzioni non continue agli estremi $[-1, 1]$.

Metodi classici di integrazione numerica (quali ad esempio il metodo dei trapezi e di Cavalieri-Simpson), che campionano anche alle estremità del dominio di interesse, calcolano in maniera esatta l'integrale di una funzione polinomiale di ordine minore rispetto alla quadratura gaussiana, a parità di punti di campionamento. Inoltre questi metodi non sono utilizzabili nei casi in cui si abbia discontinuità o singolarità della funzione da integrare agli estremi dell'intervallo.