A cura di Giovanni Senes e Giordano Morelli

INTRODUZIONE A MAXIMA

Agenda

- **Introduzione a Maxima**
- **Operatori Maxima**
- **teorema di Castigliano**
- **Referenze**

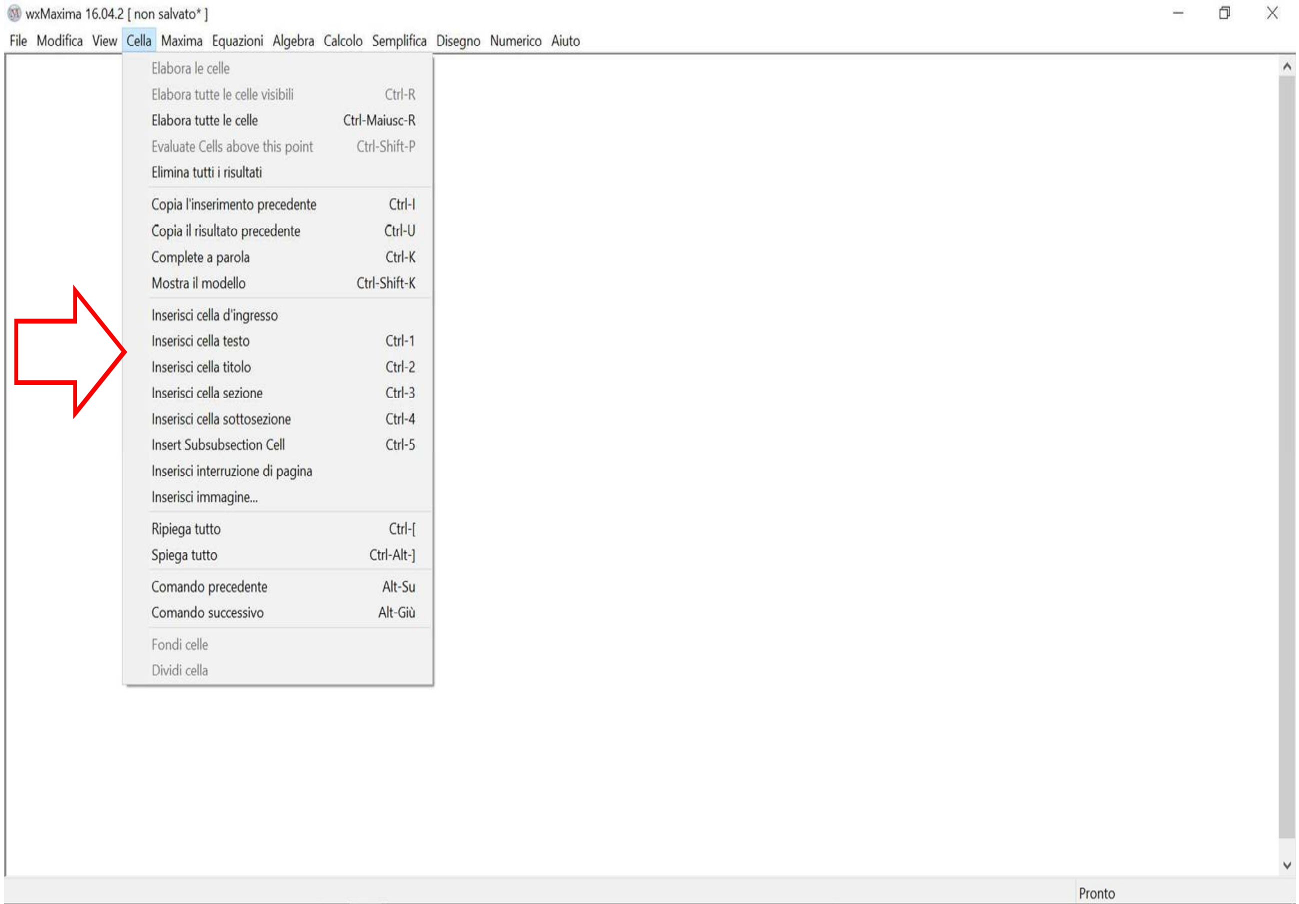
INTRODUZIONE

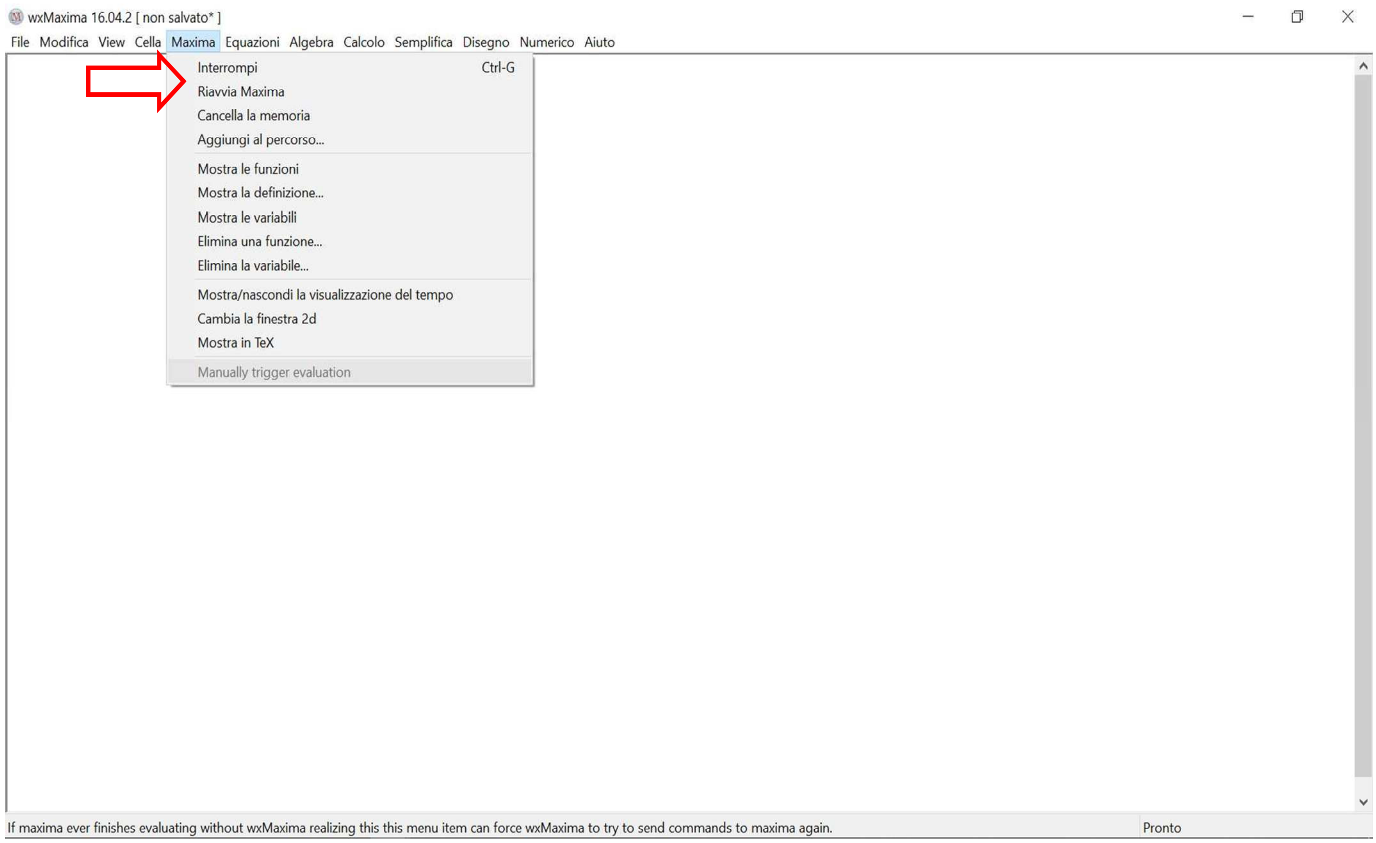
Maxima è uno strumento per la manipolazione di simboli ed espressioni numeriche, che includono:

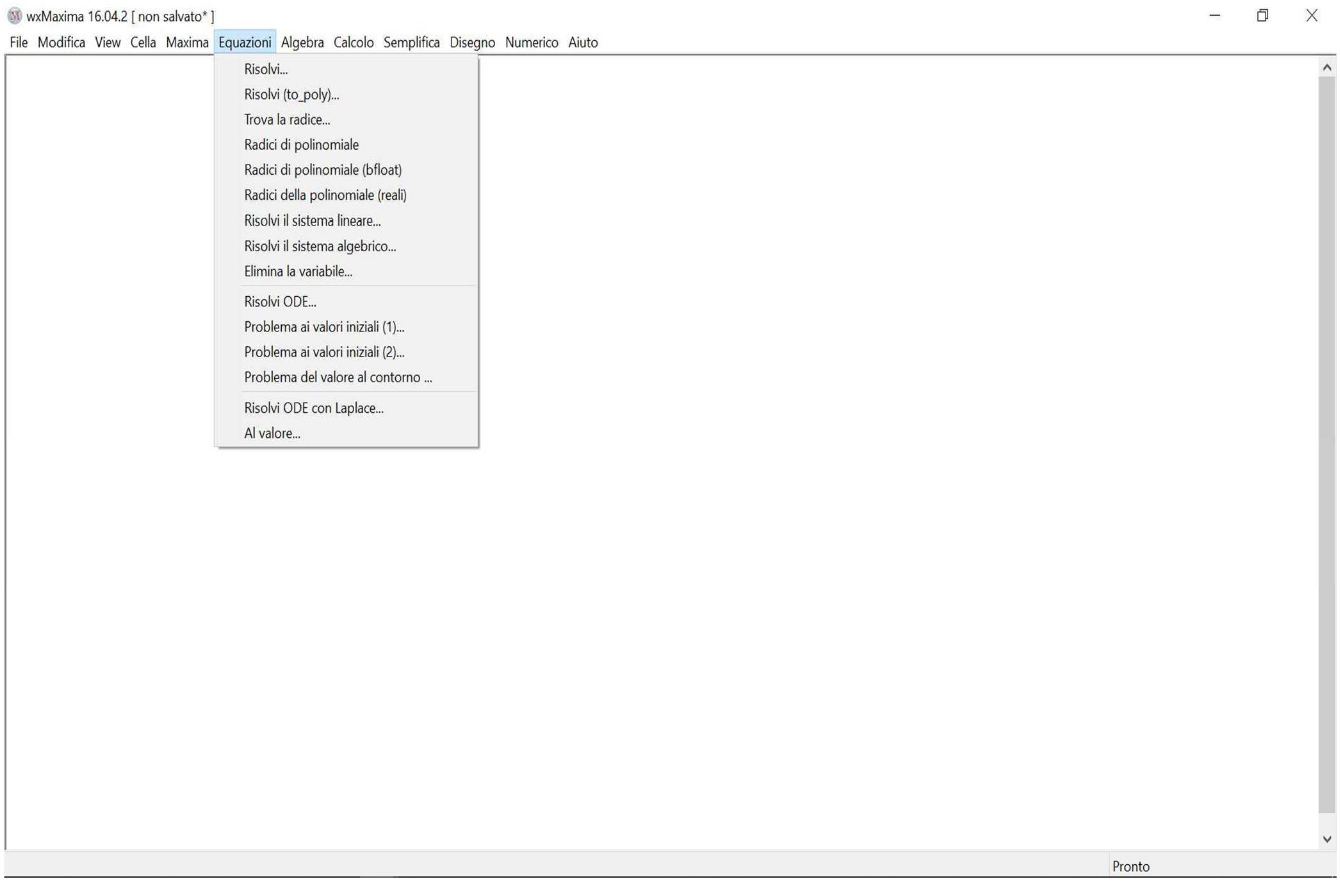
- differenzazioni,
- integrazioni,
- serie di Taylor,
- trasformate di Laplace,
- equazioni differenziali ordinarie,
- sistemi di equazioni lineari,
- polinomi,
- vettori, matrici e tensori.

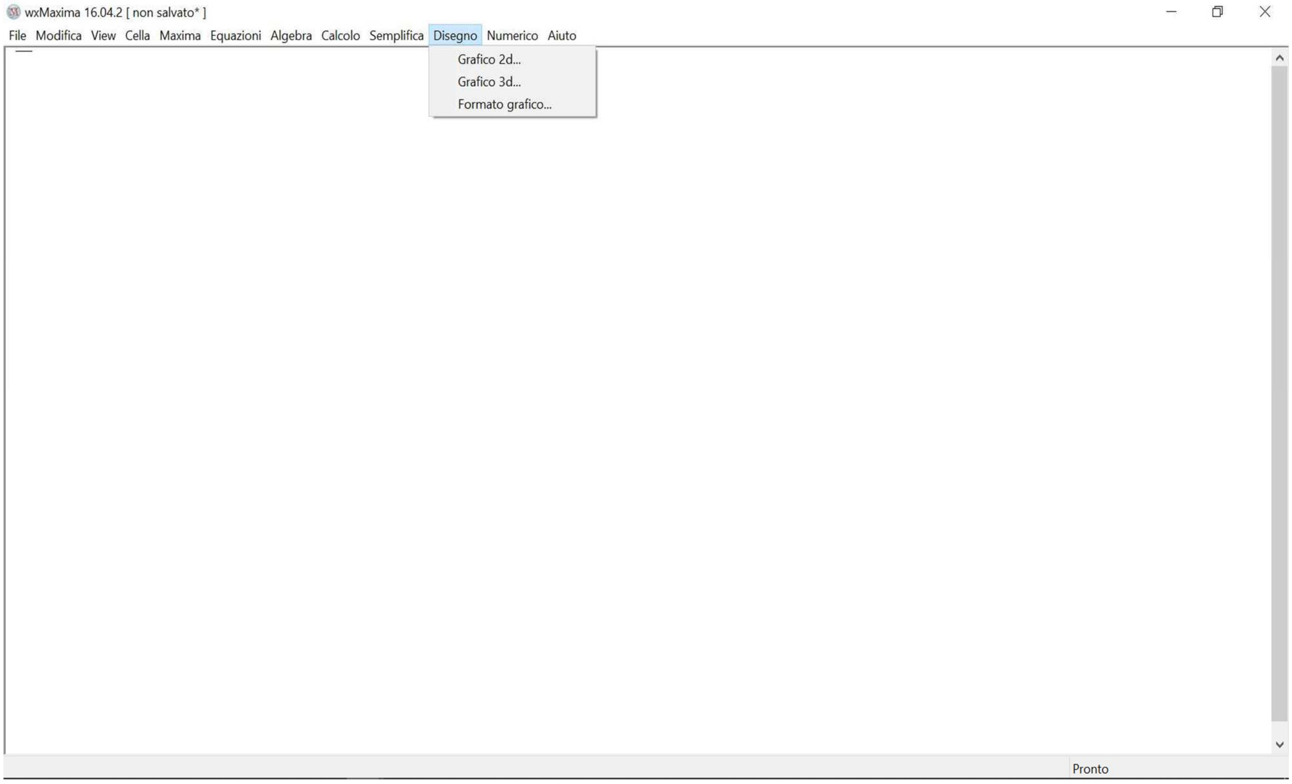
Maxima produce risultati numerici di alta precisione utilizzando frazioni esatte, numeri interi a precisione arbitraria e numeri a virgola mobile a precisione variabile. Maxima può inoltre tracciare funzioni e dati in due e tre dimensioni.

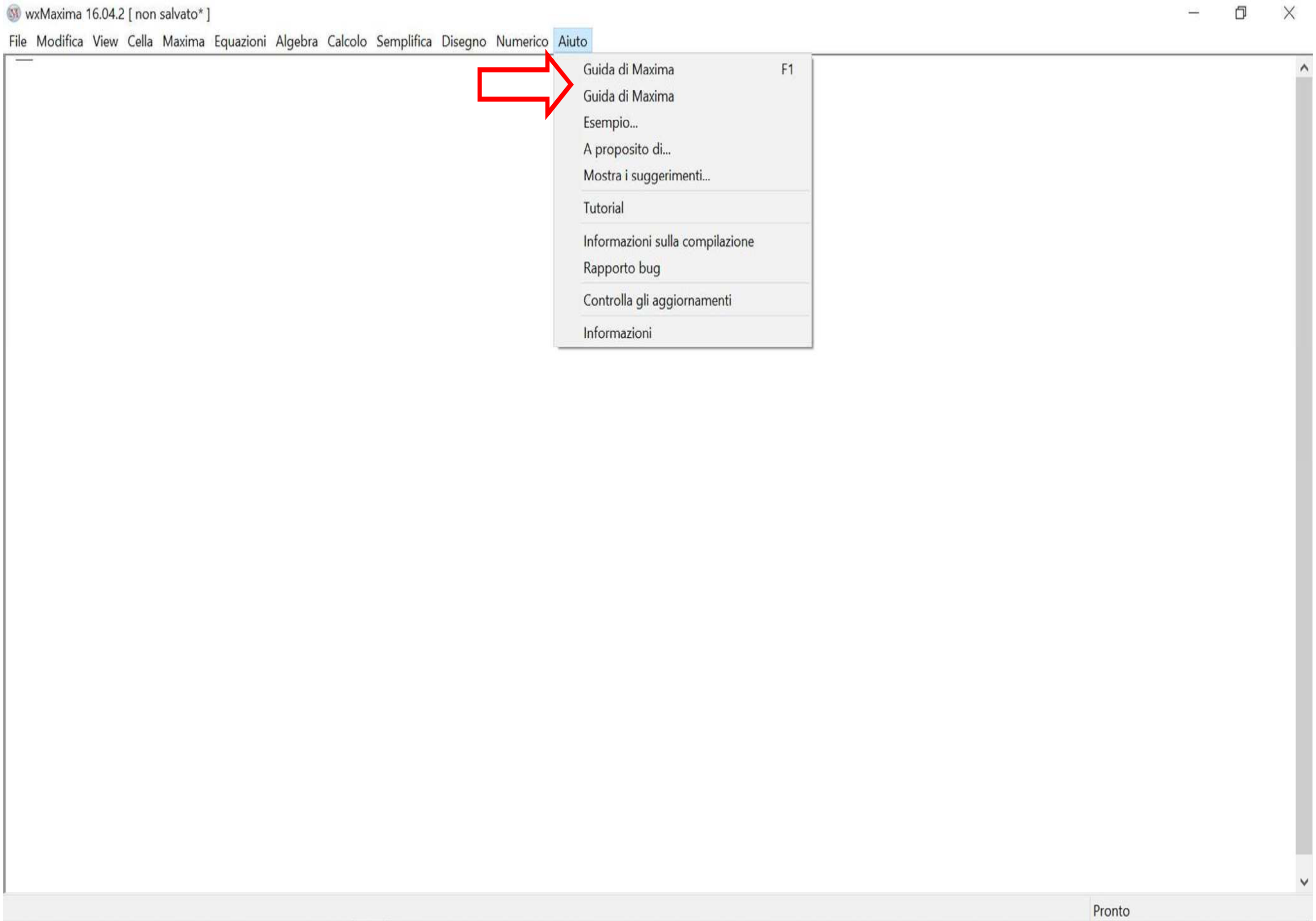
BARRA DEGLI STRUMENTI PRINCIPALI




wxMaxima 16.04.2 [non salvato*]
File Modifica View Cella Maxima Equazioni Algebra Calcolo Semplifica Disegno Numerico Aiuto
Interrompi Ctrl-G
Riavvia Maxima
Cancella la memoria
Aggiungi al percorso...
Mostra le funzioni
Mostra la definizione...
Mostra le variabili
Elimina una funzione...
Elimina la variabile...
Mostra/nascondi la visualizzazione del tempo
Cambia la finestra 2d
Mostra in TeX
Manually trigger evaluation
If maxima ever finishes evaluating without wxMaxima realizing this this menu item can force wxMaxima to try to send commands to maxima again.
Pronto


wxMaxima 16.04.2 [non salvato*]
File Modifica View Cella Maxima Equazioni Algebra Calcolo Semplifica Disegno Numerico Aiuto
Risolvi...
Risolvi (to_poly)...
Trova la radice...
Radici di polinomiale
Radici di polinomiale (bfloat)
Radici della polinomiale (reali)
Risolvi il sistema lineare...
Risolvi il sistema algebrico...
Elimina la variabile...
Risolvi ODE...
Problema ai valori iniziali (1)...
Problema ai valori iniziali (2)...
Problema del valore al contorno ...
Risolvi ODE con Laplace...
Al valore...
Pronto


wxMaxima 16.04.2 [non salvato*]
File Modifica View Cella Maxima Equazioni Algebra Calcolo Semplifica Disegno Numerico Aiuto
Grafico 2d...
Grafico 3d...
Formato grafico...
Pronto


wxMaxima 16.04.2 [non salvato*]
File Modifica View Cella Maxima Equazioni Algebra Calcolo Semplifica Disegno Numerico Aiuto
Guida di Maxima F1
Guida di Maxima
Esempio...
A proposito di...
Mostra i suggerimenti...
Tutorial
Informazioni sulla compilazione
Rapporto bug
Controlla gli aggiornamenti
Informazioni
Pronto

OPERATORI MAXIMA

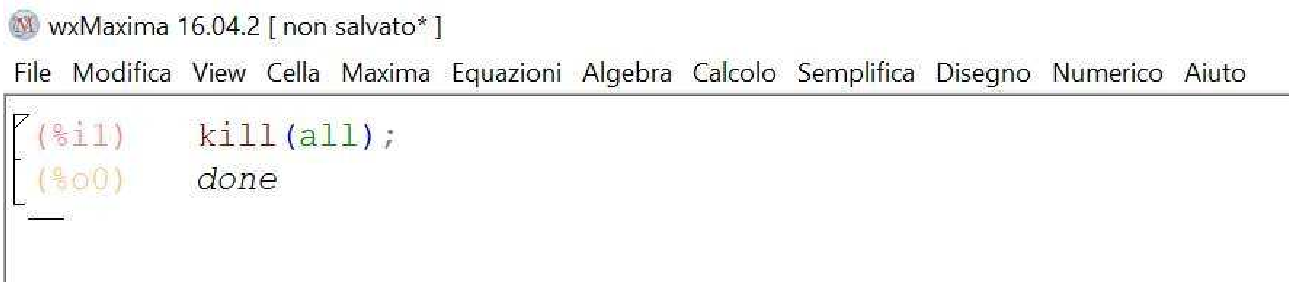
Input(%i#) e output (%o#)

Accanto al prompt (% i #) l'operazione potrebbe essere definita.

Qualsiasi input deve essere chiuso dal carattere di semicolonna (;).

Il prompt (% o #) rappresenta l'output dell'operazione.

NOTA: Maxima è un programma che fa distinzione tra maiuscole e minuscole e pertanto come regola generale, si suggerisce di adottare qualsiasi comando / operazione / variabile solo in lettere minuscole.



Il comando “kill(all)” serve per cancellare qualsiasi tipo di operazione e comando fatto precedentemente.
Il comando kill(a) invece rimuove solo la variabile “a” con tutti i suoi incarichi e proprietà assunti fino a quel momento.

CARATTERI SPECIALI

; ogni cella inoltre deve terminare con tale carattere.

% se si vuole fare riferimento al risultato immediatamente precedente calcolato da Maxima.

e è la base naturale logaritmica.

Π è uguale a 3.14159…

i è la radice quadrata di -1

: per assegnare ad una variabile un determinato valore.

$ sopprime la visualizzazione del calcolo di Maxima, ciò è utile se si sta calcolando alcuni risultati intermedi di lunga durata e non si vuole perdere tempo a visualizzarlo sullo schermo.

Input terminator ; or $

```
→       a;
(%o1)   a

→       a$

→       b;
(%o3)   b
```

Caratteri speciali (%, %pi, %e, %i) e numeri

```
→       %;
(%o4)   b

→       %pi;
(%o5)   π

→       %pi, numer;
(%o6)   3.141592653589793

→       %e;
(%o7)   %e

→       %e,numer;
(%o8)   2.718281828459045
```

```
(%i10)   a;
(%o10)   a

(%i11)   a:10;
(a)      10

(%i12)   a;
(%o12)   10
```

LISTE:

```
(%i12)  b: [3,pippo,3/5];
(b)     [3,pippo,3/5]

(%i13)  b[3];
(%o13)  3/5

(%i14)  b[3]: puffo;
(%o14)  puffo

(%i15)  b;
(%o15)  [3,pippo,puffo]
```

Come si può vedere, una volta creata la lista si può in seguito richiamare un singolo elemento di quest’ultima.
Un’altra operazione che si può fare con liste è cambiare i suoi elementi, anche questo lo si può vedere nell’immagine di sopra.

Di seguito un altro metodo per creare una lista ed assegnare contemporaneamente i rispettivi elementi a delle semplici variabili:

```
(%i19)  [c, d, e]:[20,pluto,-3/77];
(%o19)  [20,pluto,-3/77]

(%i20)  c;
(%o20)  20

(%i21)  d;
(%o21)  pluto

(%i22)  e;
(%o22)  -3/77
```

EQUAZIONI

In questo caso entra in gioco l'operatore " = "

```
(%i24)  eqn1: _a0*x-5*y=17;
(eqn1)  _a0 x -5 y=17

(%i25)  eqn2: _a1*x+3+y=29;
(eqn2)  y+_a1 x+3=29

(%i26)  eqn1;
(%o26)  _a0 x -5 y=17

(%i27)  eqn2;
(%o27)  y+_a1 x+3=29
```

```
(%i28)  expr: (x^3-1)^2;
```

(expr) $\left(x^3-1\right)^2$

```
(%i29)  f(x):=expr;
(%o29)  f(x):=expr

(%i30)  f(x);
```

(%o30) $\left(x^3-1\right)^2$

DEFINIZIONE DI FUNZIONI

PER UNA SINGOLA VARIABILE

f(x_1,…,x_n):=expr definisce una funzione denominata **f** con argomenti **x_1, …,x_n**, e il corpo della funzione **expr.** Il corpo della funzione viene valutato ogni volta che la funzione viene richiamata.

```
(%i28)   expr: (x^3-1)^2;
(expr)   (x^3-1)^2
```

```
(%i29)   f(x):=expr;
(%o29)   f(x):=expr
```

```
(%i30)   f(x);
(%o30)   (x^3-1)^2
```

PER PIù VARIABILI

f(x_1,…,x_n):=expr definisce una funzione denominata **f** con argomenti **x_1, …,x_n**, e il corpo della funzione **expr.** Il corpo della funzione viene valutato ogni volta che la funzione viene richiamata.

```
(%i1) expr : cos(y) - sin(x);
(%o1)                          cos(y) - sin(x)
(%i2) F1 (x, y) := expr;
(%o2)                         F1(x, y) := expr
```

OPERATORI MAGGIORE, MINORE, UGUALE, DIVERSO

assunzioni: maggiore(>), minore(<), uguale(equal()), diverso(notequal())

```
(%i3)  assume(xx>0, yy<0, zz>=0);
(%o3)  [xx >0, yy <0, zz ≥ 0]

(%i4)  assume(equal(ww,0));
(%o4)  [equal(ww,0)]

(%i5)  assume(notequal(qq,1));
(%o5)  [notequal(qq,1)]
```

OPERATORE *DEFINE*

Definisce una funzione denominata f con argomenti **x_1, ..., x_n** e function body **expr**. La funzione così definita può essere una normale funzione di Maxima (con argomento racchiuso tra parentesi) o una funzione di matrice (con argomenti racchiusi tra parentesi quadre).
Quando il primo argomento di **define** è un'espressione nella forma **f (x_1, ..., x_n) o f [x_1, ..., x_n],** gli argomenti della funzione vengono valutati ma f non viene valutata, anche se esiste già una funzione o una variabile con quel nome.

```
(%i7)  expr_theta_zeta:cos(theta)-sin(zeta);
(expr_theta_zeta)  cos(θ)-sin(ζ)

(%i6)  define(
       F1(theta,zeta),
       expr_theta_zeta
       );
(%o6)  F1(θ,ζ):=expr_theta_zeta
```

in questo caso si è scritto su più righe, ma si poteva farlo anche tutto nella stessa

```
(%i8)  F1(a,b);
(%o8)  cos(θ)-sin(ζ)

(%i2)  F2(theta,zeta):=expr_theta_zeta;
(%o2)  F2(θ,ζ):=expr_theta_zeta
```

VALUTAZIONI NUMERICHE

%, numer consente la valutazione numerica di un'espressione in virgola mobile.

ev(expr, arg_1, …, arg_r); valuta l'espressione expr nell'ambiente specificato dagli argomenti **arg_1, ... arg_r**. L'operatore **ev** restituisce i risultati (un'altra espressione) della valutazione

```
(%i28) expr: (x^3-1)^2;
(expr) (x^3-1)^2
```

```
(%i29) f(x):=expr;
(%o29) f(x):=expr
```

```
(%i30) f(x);
(%o30) (x^3-1)^2
```

```
(%i38) expr;
(%o38) (x^3-1)^2
```

```
(%i39) %, numer, x=3/2;
(%o39) 5.640625
```

```
(%i40) ev(expr,x=3/2);
(%o40) 361/64
```

```
(%i52) ev(expr,x=3/2), numer;
(%o52) 5.640625
```

OPERAZIONI ARITMETICHE E FUNZIONI TRIGONOMETRICHE

Addizione +

Sottrazione: -

Moltiplicazione: *

Divisione: /

Esponenziale: ^ oppure **

Moltiplicazioni matriciali: .

Radice quadrata di una variabile **x:** sqrt(x)

Funzione seno: sin(x)

Funzione coseno: cos(x)

DERIVATE E INTEGRALI

Andiamo a derivare e integrare l'espressione expr rispetto alla variabile x

Derivazione di ordine n: diff(expr, x, n)

Derivazione del primo ordine: diff(expr, x)

Integrale indefinito: integrate(expr, x)

Integrale definito in [a,b]: integrate(expr, x, a, b); Gli estremi di integrazione non dovrebbero contenere la variabile x, nonostante non sia necessario. Non è necessario che a sia minore di b, e se i due estremi coincidono, l'integrale risulta 0.

FATTORIZZAZIONE, SEMPLIFICAZIONE E ESPANSIONE

Fattorizzazione dell'espressione expr (numeri,variabili o funzioni) in fattori irriducibili: factor(expr)

Semplificazione dell'espressione expr e tutte le sue sottoespressioni, compresi gli argomenti irrazionali: fullratsimp(expr)

Scrivere in forma estesa un'espressione: expand(expr)

```
(%i33)   expr;
(%o33)   (x^3-1)^2
(%i34)   factor(expr);
(%o34)   (x-1)^2 (x^2+x+1)^2
(%i35)   fullratsimp(expr);
(%o35)   x^6-2 x^3+1
(%i36)   expr2:(g+h)^5;
(expr2)  (h+g)^5
(%i37)   expand(expr2);
(%o37)   h^5+5 g h^4+10 g^2 h^3+10 g^3 h^2+5 g^4 h+g^5
```

SISTEMI DI EQUAZIONI

Il comando solve(expr,x) risolve l'equazione expr nella variabile x, restituendo una lista di soluzioni. Se expr non è un'equazione, viene considerata come expr=0. Se vi è una sola variabile si può omettere nel comando (solve(expr)).

Per risolvere un sistema con più equazioni polinomiali (lineari e non) si usa solve([eqn_q,…,expr__n],[x_1,…,x_n]), che restituisce una lista di soluzioni nelle variabili

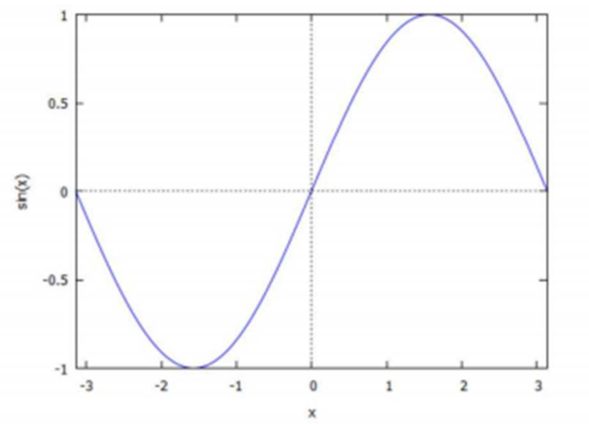
Per risolvere un sistema di equazioni plinomiali lineari si usa linsolve([expr_1,…,expr_n],[x_1,…,x_n]), che restituisce una lista di soluzioni nelle variabili.

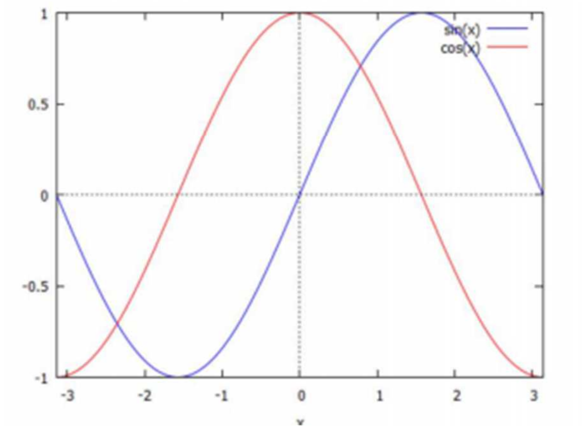
```
(%i60) kill(x,y);
(%o60) done

(%i61) linsolve([x+3*y=2, 2*x-y=5],[x, y]);
(%o61) [x=17/7,y=-1/7]

(%i62) kill(eqn, x, y);
(%o62) done

(%i63) eqn:[4*x^2-y^2=12,x*y-x=2];
(eqn)  [4 x^2-y^2=12,x y-x=2]

(%i64) solve(eqn, [x,y]);
(%o64) [[x=2,y=2],[x=0.5202594388652008 %i-0.1331240357358706,y=0.07678378523787788-
3.608003221870287 %i],[x=-0.5202594388652008 %i-0.1331240357358706,y=3.608003221870287 %i+
0.07678378523787788],[x=-1.733751846381093,y=-0.1535675710019696]]

(%i65) %[2];
(%o65) [x=0.5202594388652008 %i-0.1331240357358706,y=0.07678378523787788-3.608003221870287 %i]
```

GRAFICI

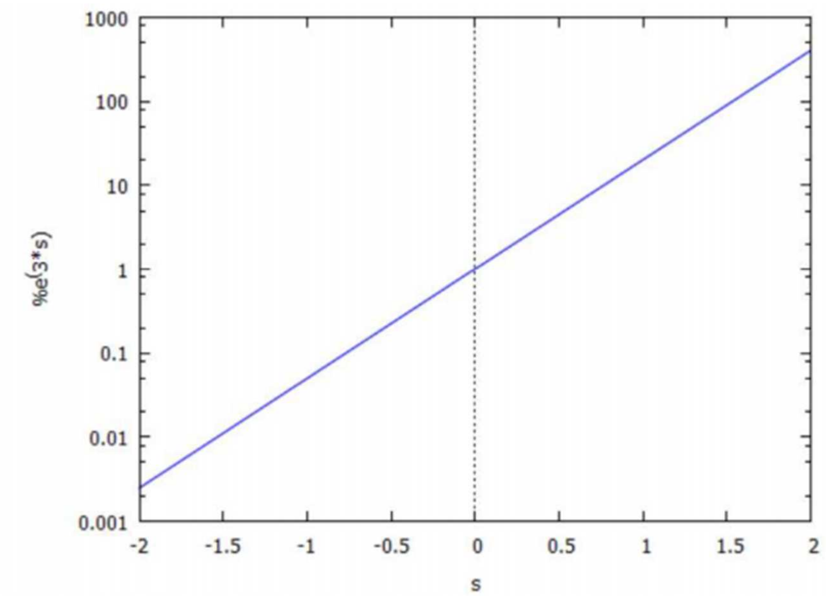
Plot2d(plot, x_range, …, options) o plot2d([plot_1, …, plot_n], …, options) mostrano uno o più grafici in due dimensioni. Quando i nomi delle espressioni o delle funzioni vengono usati per definire i grafici, questi dovrebbero dipendere da una unica variabile var e l'utilizzo di x_range sarà necessario per definire il nome della variabile e il suo valore minimo e massimo. La sintassi per x_range è [variable, min, max]

```
(%i69)  kill(all);
(%o0)   done

(%i1)   plot2d ([sin(x)], [x, -%pi, %pi]);
(%o1)   [C:/Users/manto/maxout12624.gnuplot]

(%i2)   plot2d ([sin(x), cos(x)], [x, -%pi, %pi])$
```





plot2d()




```
(%i69)  kill(all);
(%o0)   done

(%i1)   plot2d ([sin(x)], [x, -%pi, %pi]);
(%o1)   [C:/Users/manto/maxout12624.gnuplot]

(%i2)   plot2d ([sin(x), cos(x)], [x, -%pi, %pi])$

(%i3)   plot2d(%e^(3*s), [s, -2, 2], logy)$
```

DOCUMENTAZIONE INGLESE • http://maxima.sourceforge.net/docs/manual/maxima.html • http://maxima.sourceforge.net/docs/tutorial/en/minimalmaxima.pdf (miniguida) • http://superk.physics.sunysb.edu/~mcgrew/phy310/documenta tion/maxima-reference.pdf (guida ampia)

DOCUMENTAZIONE ITALIANA http://maxima.sourceforge.net/docs/tutorial/it/maxima_1.0-consonni.pdf (miniguide) LAB Maxima file saved as intro_maxima_operators.wxmx

IL TEOREMA DI CASTIGLIANO

"La derivata parziale dell'energia interna U in una struttura su cui agisce una forza P o una coppia C in un punto qualsiasi, è uguale rispettivamente allo spostamento o alla rotazione nel punto di applicazione e nella direzione del verso della forza (coppia)".

$$\delta = \frac{\partial U}{\partial P}$$

$$\varphi = \frac{\partial U}{\partial C}$$

Il teorema si può applicare a strutture linearmente elastiche (materiali Hookeani) con temperatura costante e supporti inflessibili.

Il teorema di castigliano:

1- Viene applicato a strutture staticamente determinate, che permettono di calcolare lo spostamento e la rotazione della struttura.
2- Viene applicato a strutture staticamente ridondanti, che permettono di determinare le forze di reazione. Dunque, la struttura diventa staticamente determinata e quindi poi di calcolare lo spostamento e la rotazione della struttura.

Considerando un problema **piano,** l'energia interna (*U*) della struttura è:

$$U = \int_l \left(\frac{M_f^2}{2EJ} + \frac{N^2}{2AE} + \xi \frac{T^2}{2AG} \right) dx$$

Dove:

l è la lunghezza della struttura;

M_f, N, T sono il momento flettente, la forza normale e la forza di taglio;

A e J sono la sezione e il momento d'inerzia;

E e G sono il modulo di Young e il modulo di taglio del materiale;

ξ è il coefficiente di taglio associato alla valutazione dell'energia interna fatta dalla forza di taglio. dove ξ è 1.2 o 1.11 per sezioni rettangolari o circolari.

CASO A: Struttura staticamente determinato

Considerando una trave a sbalzo in acciaio su cui viene applicata una forza concentrata P nel punto A sull'estremità, e fissata all'altra estremità, valutare lo spostamento della trave nel punto A (δ_A)

Hp) Sezione Rettangolare: b=10mm, h=20mm, l=100mm, P=10000N, ξ =1.2, E= 210000 Mpa e ν=0,3

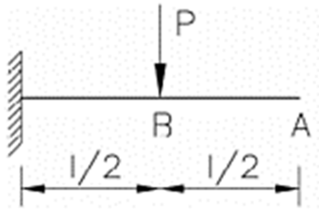
Abbiamo che J= b*h^3 /12= 6666,66 mm^4, A= b*h: 200 mm^2, G= E/[2(1+ν)]: 80000 MPa (ca)

$$M_f(x) = Px \quad ; \quad T = P$$

$$U = \int_0^l \frac{M_f^2}{2EJ}dx + \int_0^l \xi\frac{T^2}{2AG}dx = \int_0^l \frac{P^2x^2}{2EJ}dx + \int_0^l \xi\frac{P^2}{2AG}dx = \frac{P^2l^3}{6EJ} + \xi\frac{P^2l}{2AG}$$

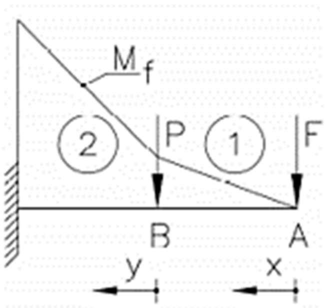
$$\delta_A = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{Pl^3}{3EJ} + \xi\frac{Pl}{AG} = 2{,}3810 + 0{,}075 = 2{,}456\,mm$$

Il taglio contribuisce alla deformazione della trave spostando la sua estremità di un 3,05%, per questo limitato contributo esso viene solitamente trascurato dai primi dimensionamenti della struttura.



CASO B: Struttura staticamente determinata

Consideriamo una trave a sbalzo su cui viene applicata una forza concentrata P nel punto B posto nella mezzeria della trave e fissata a una delle estremità, valutare lo spostamento (δ_A) della trave nel punto A posto nell'estremità libera.



NOTA: il punto A è una sezione della trave non caricata.

La derivata parziale dell'energia interna U in una struttura su cui agisce una forza P in un punto qualsiasi, è uguale rispettivamente allo spostamento o alla rotazione nel punto di applicazione e nella direzione del verso della forza".

Hp) Il contributo del taglio è stato trascurato dall'equazione dell'energia interna.

Una forza immaginaria F viene applicata nel punto A, verrà poi considerata nulla alla fine.

Parte 1)

$$M_{f,1}(x) = Fx$$

$$U_1 = \int_0^{l/2} \frac{M_{f,1}^2}{2EJ}dx = \int_0^{l/2} \frac{F^2x^2}{2EJ}dx = \frac{F^2}{2EJ}\int_0^{l/2} x^2dx = \frac{F^2}{2EJ}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{l/2} = \frac{F^2}{2EJ}\frac{l^3}{24} = \frac{F^2l^3}{48EJ}$$

Parte 2)

$$M_{f,2}(y) = Py + F(y + \frac{l}{2})$$

$$U_2 = \int_0^{l/2} \frac{M_{f,2}^2}{2EJ} dy = \int_0^{l/2} \frac{(Py + F(y + \frac{l}{2}))^2}{2EJ} dy$$
$$= \frac{1}{2EJ} \int_0^{l/2} (P^2 y^2 + F^2 y^2 + F^2 \frac{l^2}{4} + 2F^2 y \frac{l}{2} + 2PFy^2 + 2PFy \frac{l}{2}) dy$$
$$= \frac{1}{2EJ} (P^2 \frac{l^3}{24} + F^2 \frac{l^3}{24} + F^2 \frac{l^3}{8} + F^2 \frac{l^3}{8} + PF \frac{l^3}{12} + PF \frac{l^3}{8})$$
$$= \frac{1}{48EJ} (P^2 l^3 + 7F^2 l^3 + 5PFl^3)$$

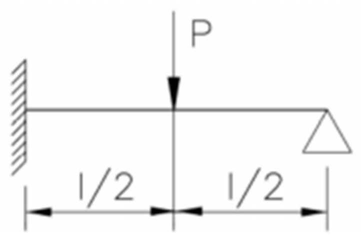
Quindi l'energia interna totale della struttura è

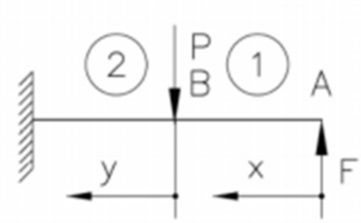
$$U = U_1 + U_2 = \frac{F^2 l^3}{48EJ} + \frac{1}{48EJ} (P^2 l^3 + 7F^2 l^3 + 5PFl^3) = \frac{1}{48EJ} (P^2 l^3 + 8F^2 l^3 + 5PFl^3)$$

Ora nella valutazione finale consideriamo nulla la forza F

$$\delta_A = \frac{\partial U}{\partial F} = \frac{1}{48EJ} (16Fl^3 + 5Pl^3) = \frac{1}{48EJ} 5Pl^3 = \frac{5Pl^3}{48EJ}$$

CASO C: Struttura staticamente ridondante (1 gdl)





Considerando una trave:

- Su cui viene applicata una forza concentrata P nel punto B posto nella mezzeria della trave
- Fissata nell'estremità sinistra
- Incernierata nel punto A posto nell'estremità destra

Valutare la forza di reazione F che agisce sul supporto nel punto A

L'equazione di equilibrio non è sufficiente per calcolare le reazioni vincolari che agiscono sulla trave. Dunque, va imposta un'equazione compatibile con la deformazione della struttura.

In questo caso, il punto A non deve essere capace di muoversi verticalmente.

Parte 1)

$$M_{f,1}(x) = Fx$$

$$U_1 = \int_0^{l/2} \frac{M_{f,1}^2}{2EJ} dx = \int_0^{l/2} \frac{F^2 x^2}{2EJ} dx = \frac{F^2}{2EJ} \int_0^{l/2} x^2 dx = \frac{F^2}{2EJ} \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{l/2} = \frac{F^2}{2EJ} \frac{l^3}{24} = \frac{F^2 l^3}{48EJ}$$

Parte 2)

$$M_{f,2}(y) = F\left(y + \frac{l}{2}\right) - Py$$

$$U_2 = \int_0^{l/2} \frac{M_{f,2}^2}{2EJ} dy = \frac{1}{48EJ}(P^2l^3 + 7F^2l^3 - 5PFl^3)$$

L'energia interna totale è:

$$U = U_1 + U_2 = \frac{F^2l^3}{48EJ} + \frac{1}{48EJ}(P^2l^3 + 7F^2l^3 - 5PFl^3) = \frac{1}{48EJ}(P^2l^3 + 8F^2l^3 - 5PFl^3)$$

Si valuta lo spostamento della trave nel punto A (δ_A) dalla derivata parziale dell'energia totale della struttura rispetto alla forza F.

Imponendo che lo spostamento (δ_A) sia impossibilitato a causa della presenza del supporto che agisce nel punto A, l'incognita del problema è la reazione vincolare F che il supporto induce nella struttura.

$$\delta_A = \frac{\partial U}{\partial F} = \frac{1}{48EJ}(16Fl^3 - 5Pl^3) = 0 \;\Rightarrow\; F = \frac{5P}{16}$$

RIFERIMENTI

ENGLISH DOCUMENTATION Shigley, J. E. (2011). Shigley's mechanical engineering design. Tata McGraw-Hill Education. Section 4.8 pp. 164-169. https://eclass.teicrete.gr/modules/document/file.php/TM114/shigley-machine-design- .pdf

ITALIAN DOCUMENTATION Strozzi, A. (1998). Costruzione di Macchine, Pitagora Ed., Bologna. Strozzi, A. (2016). Fondamenti di Costruzione di Macchine, Pitagora Ed., Bologna

LAB Maxima file salvato come Maxima_case_A_B_C.wxmx