

Lezione del 30/05/2019

a cura di Schilardi S. e Palumbo G.

Oscillatore ad un singolo grado di libertà

Si andrà ad analizzare un oscillatore a singolo grado di libertà, per valutare le differenze fra l'RBE2 e RBE3.

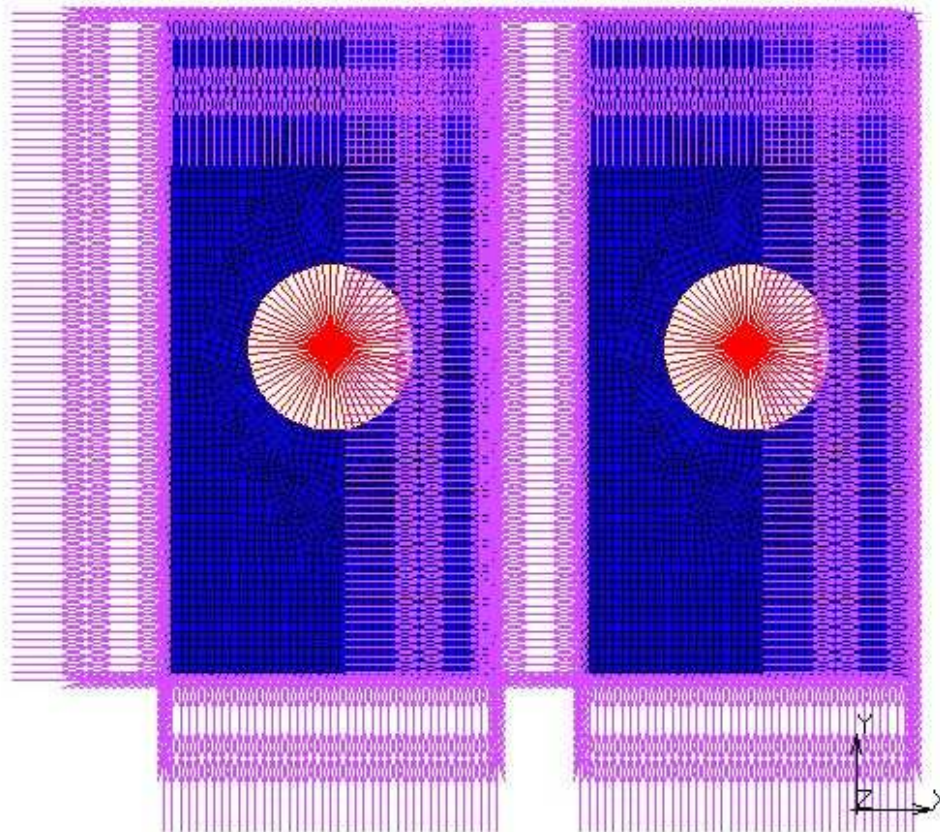


Fig.1 Piastre con boundary condition al bordo

Aperto il file di [Marc Dimostratore RBE2 vs RBE3](#) si possono notare due piastre rettangolari forate, entrambe incastrate sul bordo senza possibilità di traslazioni e rotazioni. Al centro del foro una delle piastre presenterà un vincolo RBE2, mentre l'altra un RBE3. Il nodo di controllo dell'una e il nodo controllato dell'altra saranno sollecitati da un carico verticale unitario, al fine di analizzarne le differenze, sia a livello tensionale che a livello deformativo.

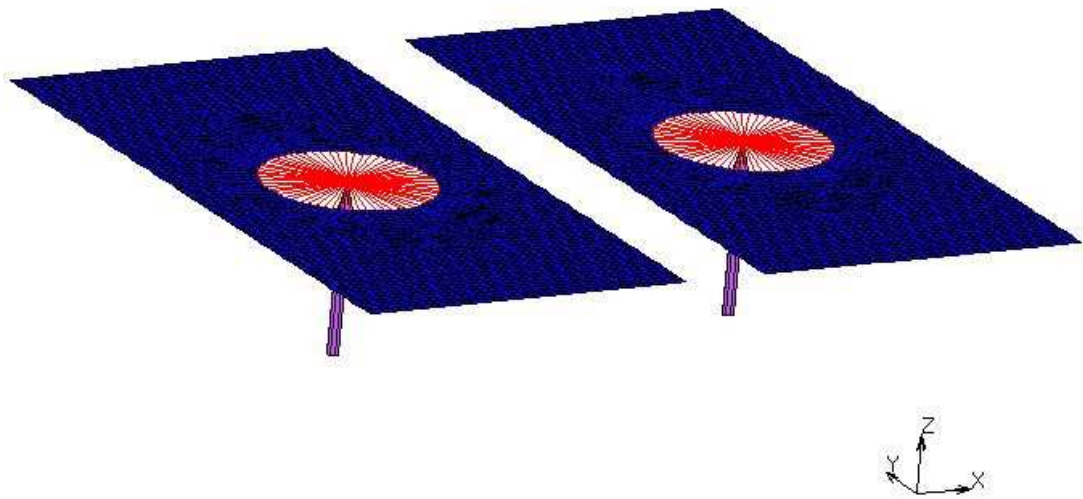


Fig.2 Piastre con carico unitario nel centro del foro

Di fatto al nodo centrale è applicato lo stesso carico unitario (q_1) in direzione Z. Aprendo il file dei risultati e amplificando la deformata sarà possibile notare l'entità degli spostamenti nella direzione del carico.

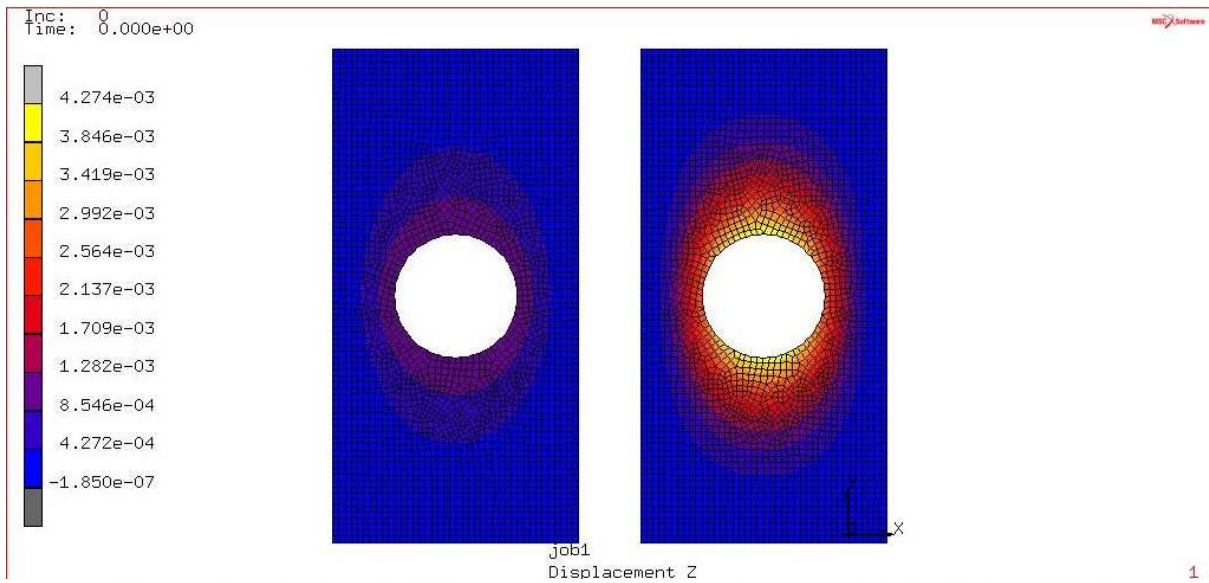


Fig.3 Deformate piastre nel piano $\langle x,y \rangle$

Analizzando le deformate nel piano $\langle x,z \rangle$ è necessario individuare quale delle due piastre presenti il vincolo RBE2 e quali il vincolo RBE3.

Sapendo che l'RBE2 è un corpo rigido, è possibile notare che nella piastra in Fig.4 tutti i nodi sono allineati su una circonferenza piana rigida nell'indeformata e rimangono allineati su una circonferenza piana nella deformata; pertanto tale piastra presenterà l'RBE2.



Fig.4 Deformata piastra a sinistra piano $\langle x,z \rangle$

Di conseguenza nella piastra in Fig.5, dove si nota uno spostamento differenziale in z di tipo parabolico, sarà presente il vincolo RBE3.

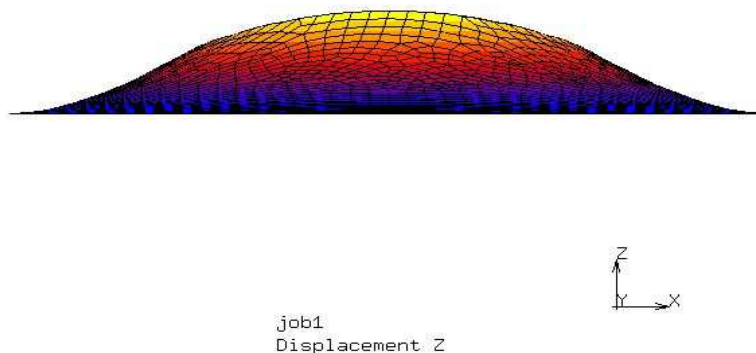


Fig.5 Deformata piastra a destra piano $\langle x,z \rangle$

Volendo giustificare questo andamento parabolico, si può affermare che la piastra è rettangolare e il lato più lungo è incastrato, andando quindi a evidenziare il bordo del foro in prossimità del lato maggiore, si nota che è molto prossimo a tale incastro. Sfasando di 90 gradi lungo il piano della piastra, sarà presente molto più materiale da deformare quindi applicando una forza di tipo unitaria lungo Z, si andrà a deformare maggiormente la zona con più materiale.

L'RBE2 è un vincolo rigido, quindi l'entità degli spostamenti dovrà essere uguale per tutti i punti della circonferenza.

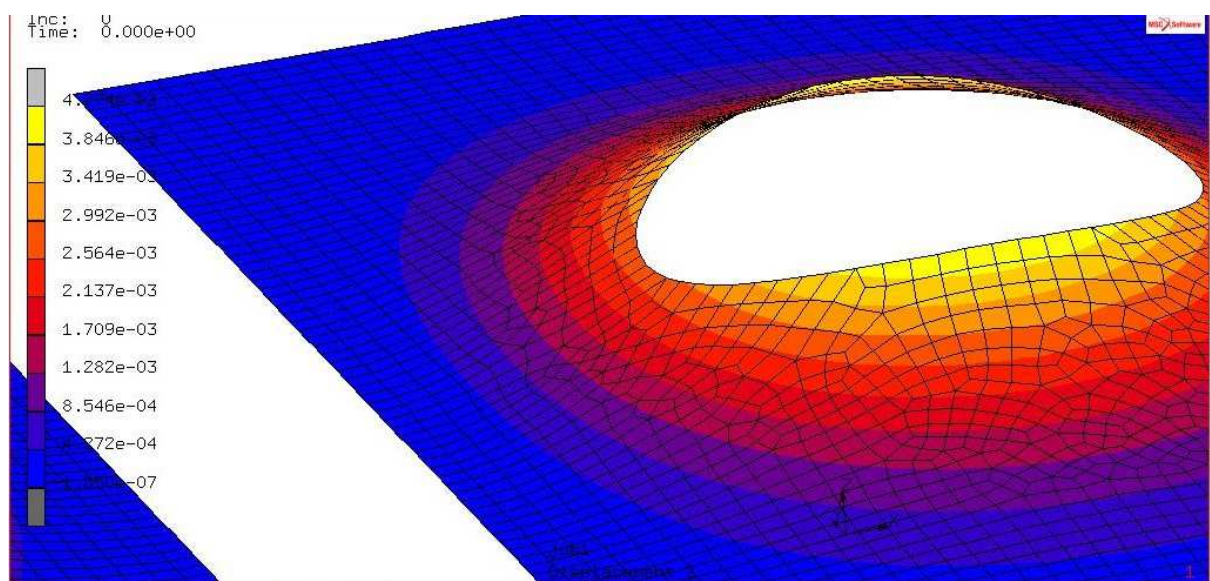


Fig.6 Zona bordo piastra con RBE3

Si analizzeranno ora le forze trasmesse. Si nota che la forza esterna trasmessa alle due piastre è identica, di entità un 1N.

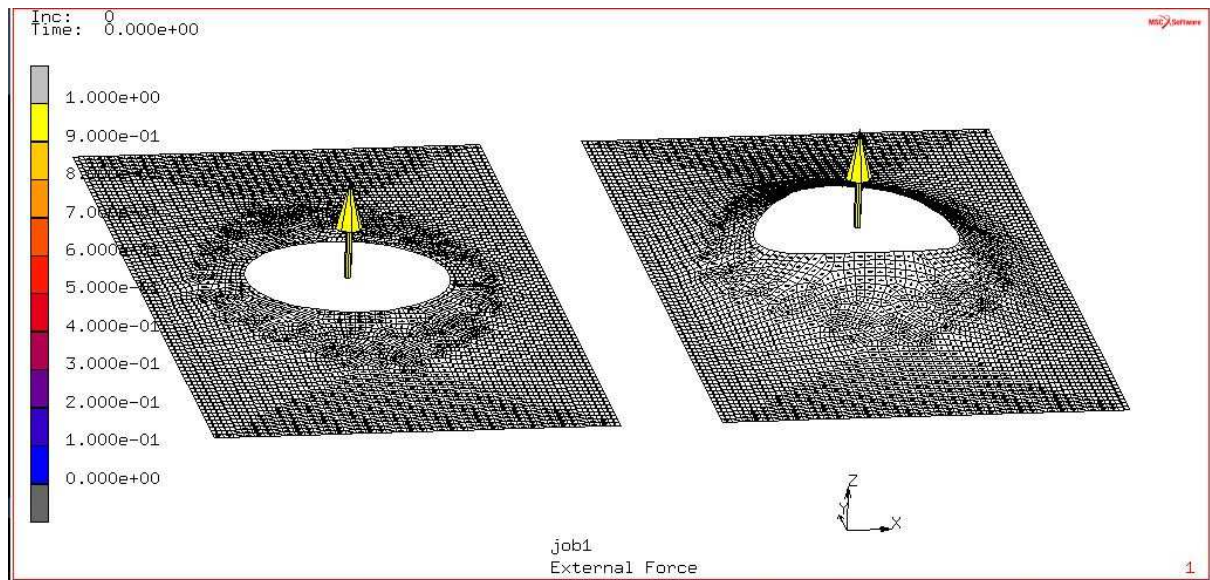


Fig.7 Forza esterna trasmessa applicata al centro del foro

Valutando le Tying force, cioè le reazioni vincolari dei due vincoli interni, si nota che al nodo di controllo e al nodo controllato è presente una forza di entità pari a 1N che bilancia la forza trasmessa dall'esterno. Andando ad amplificare la scala di tale forza è possibile notare sul bordo del foro di entrambe le piastre una distribuzione di forze di minore entità.

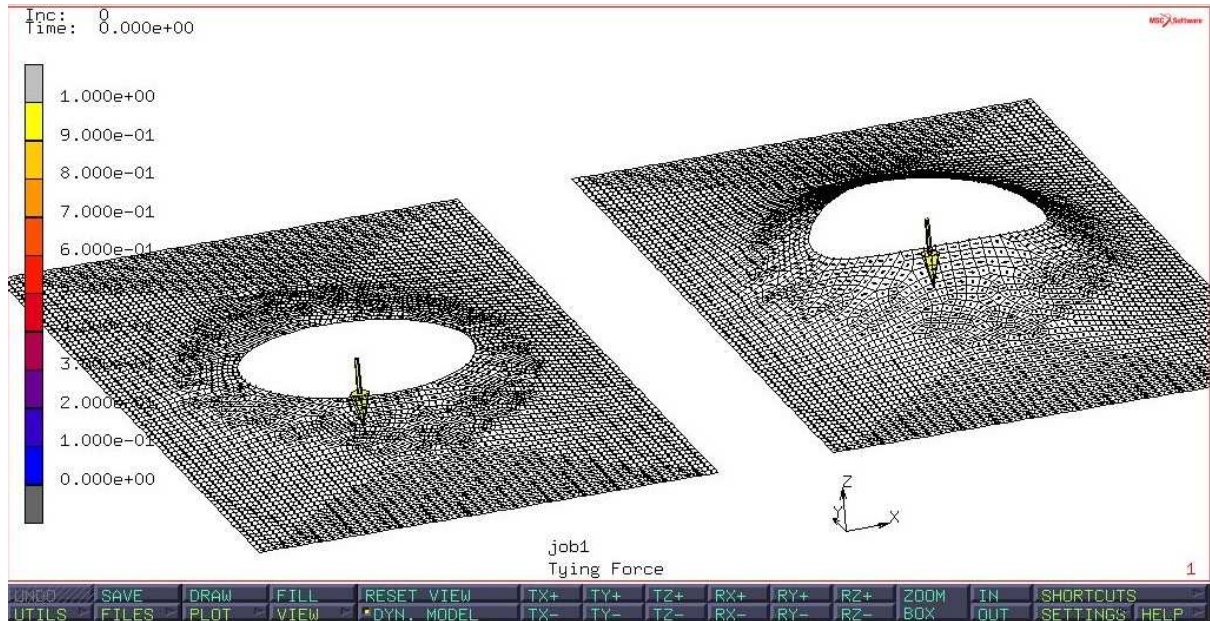


Fig. 8 Tying force equilibrante la forza esterna

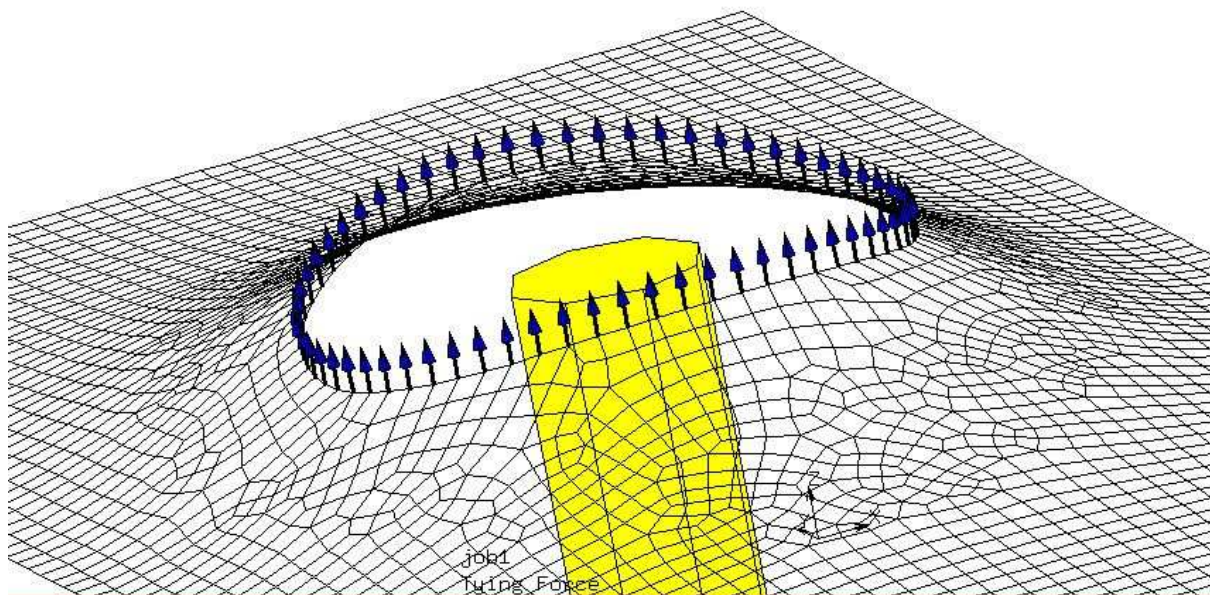


Fig.9 Distribuzione forze sulla circonferenza al vincolo RBE3

Sull'RBE3 tutte le forze applicate sulla circonferenza sono uguali (Fig. 9), questo sia perché i nodi sono tutti settati con lo stesso peso, sia perché esiste una certa uniformità della mesh, infatti questa distribuzione non è garantita se si andasse ad affinare la mesh in alcuni punti della circonferenza anziché su altri.

Ovviamente, applicando le stesse forze lungo la circonferenza, le zone più rigidamente connesse a terra cedono di meno, mentre le zone meno connesse a terra cedono di più.

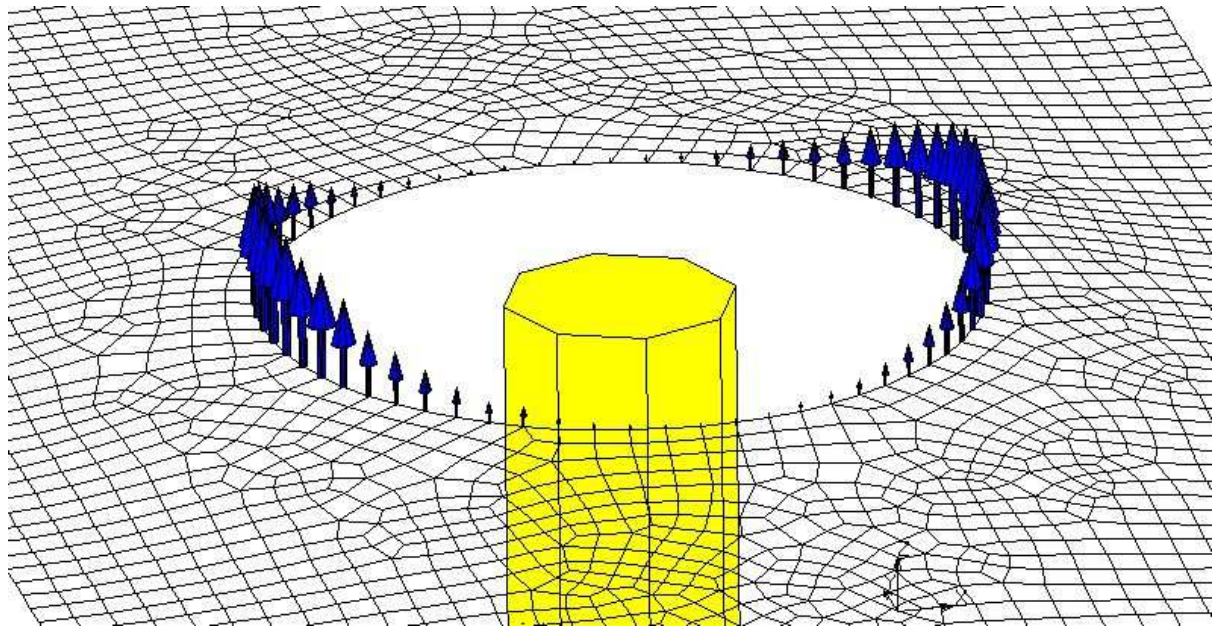


Fig.10 Distribuzione forze sulla circonferenza al vincolo RBE2

Per l'RBE2 si andrà ad imporre un moto di corpo rigido, ma, dato che il corpo è doppiamente simmetrico e la forza è applicata nel baricentro della piastra, non esiste motivo per cui la circonferenza debba ruotare rispetto all'asse x o l'asse y, quindi essa si limiterà a traslare verticalmente lungo Z senza inflettersi. Tutti i punti dovranno sollevarsi della stessa quantità, però essendo alcuni più fortemente connessi a terra rispetto ad altri e al fine di garantirne l'equo spostamento, bisognerà applicare forze maggiori.

Poiché entrambi i vincoli distribuiscono l'azione esterna ai nodi della periferia del foro ed essendo il vincolamento diverso per l'RBE2 e l'RBE3, la distribuzione al bordo sarà diversa. Supponiamo di calettare nel foro un materiale molto più rigido di quello costituente la piastra, allora probabilmente il vincolo migliore da utilizzare sarebbe un RBE2; mentre se il materiale inserito nel foro fosse più deformabile rispetto alla piastra allora sarebbe preferibile usare un RBE3.

Si analizzerà nel seguito, tramite l'utilizzo di un foglio di calcolo ed al fine di risolvere il problema della risposta armonica, un oscillatore a singolo grado di libertà smorzato e forzato. Si apra il file [sdof_finale_versione_studenti.wmx](#) editato dagli studenti allo scopo di ampliare con ulteriori commenti il foglio di calcolo già fornito dal docente.

Risposta armonica tramite sovrapposizione modale

A questo punto si procede secondo la teoria della sovrapposizione modale.

Ricapitolando, è stato imposto che il moto della struttura avvenga secondo un numero limitato di forme che sono combinazione lineare dei primi n modi propri, con $n=5$.

Di fatto si può affermare che la deformata della struttura è ottenuta come combinazione lineare delle colonne della matrice Ξ , in cui le colonne rappresentano proprio i modi propri:

Si apra il foglio di lavoro [lamella_fatto.mud](#) e si lanci un job modale; aprendo il foglio dei risultati e considerando gli spostamenti, ad esempio quelli lungo l'asse z , della struttura secondo il primo modo, si compila un pezzo della colonna legata agli spostamenti in z della matrice Ξ . Si prosegue compilando le restanti colonne della matrice secondo il numero di modi propri scelti.

$$\underline{\Xi} = [\hat{d}_1, \dots, \hat{d}_l, \dots, \hat{d}_m] \quad (1)$$

con

\hat{d} : colonne della matrice Ξ ;

1: primo modo proprio;

l : l -esimo modo proprio;

m : ultimo modo proprio.

Tali colonne quindi si ottengono dalla moltiplicazione degli elementi della matrice dei modi propri Ξ e di un vettore di coefficienti ξ , che rappresenta le modulanti dei modi propri:

$$\underline{d} = \underline{\Xi} \underline{\xi} \quad (2)$$

Ora, considerando la matrice complessiva e moltiplicando essa per la sua trasposta e per la matrice massa si ottiene un oggetto che presenta tutti i termini fuori diagonale uguali a zero ed i termini diagonali uguali ad 1:

$$\underline{\Xi}^T \underline{M} \underline{\Xi} = \underline{I} \quad (3)$$

Procedendo in modo analogo per la matrice di rigidezza \underline{K} si ottiene una matrice che contiene come componenti diagonali le pulsazioni al quadrato:

$$\underline{\Xi}^T \underline{K} \underline{\Xi} = \underline{\Lambda} = \text{diag}(\omega_i)^2 \quad (4)$$

In questo modo sia la matrice massa \underline{M} sia la matrice di rigidezza \underline{K} sono diagonalizzate.

La matrice di smorzamento \underline{C} non è diagonalizzata allo stesso maniera, salvo che venga definita come combinazione lineare delle prime due, cosa che verrà fatta:

$$\underline{C} = \alpha \underline{M} + \beta \underline{K} \quad (5)$$

Si considerano le equazioni algebriche derivanti dalla risposta in frequenza, viste nel paragrafo *Harmonic response analysis*:

$$(-\omega^2 \underline{M} + j\omega \underline{C} + \underline{K}) \underline{d} = \underline{f} \quad (6).$$

Sostituendo la (2) e moltiplicando entrambi i membri per $\underline{\Xi}^T$, in modo tale da proiettare sullo spazio delle configurazioni possibili ed ottenere una dimensione lineare dei modi propri, si ottiene l'espressione:

$$\underline{\Xi}^T (-\omega^2 \underline{M} + j\omega \underline{C} + \underline{K}) \underline{\Xi} \underline{\xi} = \underline{\Xi}^T \underline{f} \quad (7)$$

in questo modo si fa sparire ogni contributo legato alle reazioni vincolari, che nascono inevitabilmente se si costringe la struttura a seguire alcune deformazioni e altre no; si ricordi infatti che si sta vietando la deformazione della struttura secondo qualunque forma deformativa che non sia rappresentata dai primi n modi propri.

La premoltiplicazione per la matrice $\underline{\Xi}^T$ permette che la matrice $\underline{\Xi}^T (-\omega^2 \underline{M} + j\omega \underline{C} + \underline{K}) \underline{\Xi}$ torni ad essere quadrata, mentre il termine tra parentesi $(-\omega^2 \underline{M} + j\omega \underline{C} + \underline{K})$ era rettangolare.

Sviluppando la (7), ricordando la (3) e la (4) e riducendo la matrice \underline{C} in funzione della matrice identità e della matrice $\underline{\Lambda}$

$$\underline{C} = \alpha \underline{I} + \beta \underline{\Lambda} \quad (8),$$

si ottiene una relazione ridotta alla forma diagonale:

$$(-\omega^2 \underline{I} + j\omega (\alpha \underline{I} + \beta \underline{\Lambda}) + \underline{\Lambda}) \underline{\xi} = \underline{\Xi}^T \underline{f} \quad (9)$$

che rappresenta un sistema di m -equazioni in m -incognite, dove al primo membro si ha la somma di quattro matrici diagonali ed il termine noto è un vettore di m -componenti dato dal prodotto scalare di $\underline{\Xi}$ e la forzante esterna. Tale sistema risulta essere risolvibile disaccoppiando le equazioni che lo compongono, così facendo si ottiene un set di m -equazioni complesse indipendenti:

$$(-\omega^2 + j\omega (\alpha + \beta \omega_i^2) + \omega_i^2) \xi_i = q_i, \quad i = 1, \dots, m \quad (10).$$

ove q_l (l-esima equazione) è funzione di ξ_l (l-esima incognita) e di un valore complesso, funzione a sua volta della:

- ω pulsazione della forzante;
- ω_l pulsazione propria secondo l-esimo modo proprio;
- α e β .

A questo punto, operando una divisione tra numeri complessi si ottiene:

$$\xi_l = q_l / (-\omega^2 + j\omega (\alpha + \beta \omega_l^2) + \omega_l^2)$$

La (10) può essere interpretata come l'equazione caratteristica di un oscillatore a singolo grado di libertà con azionamento armonico che presenta le seguenti proprietà:

- massa unitaria;
- frequenza propria equivale con quella di un l-esimo modo proprio;
- lo smorzamento frazione critico ζ_l è funzione dei due coefficienti di Rayleigh damping, in particolare

$$\zeta_l = \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{\omega_l} + \beta \omega_l \right);$$

- il carico esterno è definito da q_l che è il prodotto scalare tra l-esimo modo proprio e la forzante;

Quello che verrà fatto, invece di utilizzare le formule sopra descritte, è utilizzare Maxima, tramite il quale è stata trovata la soluzione dell'oscillatore monodimensionale. Utilizzando quest'ultima si andrà a vedere come ogni oscillatore, associato ad ogni modo proprio, si comporta ed in seguito si comporranno le rispettive risposte.

Si torna sul foglio di calcolo [risposta_per_sovrapposizione_modale_versione_studenti.wmx](#) e si imposta un ciclo.

Risposta per sovrapposizione modale: lamella.mud

Si può ottenere lo stesso grafico al comando %t27 utilizzando il Marc, di seguito si vedrà in che modo.

Si apra il file di Marc [lamella.mud](#) e si lanci il job denominato *harmonic_1st_reso*. Dopo aver aperto il file dei risultanti si esegua le seguenti istruzioni:

- si apra un history plot analizzando il nodo di centro incastro (nodo 4);
- inc range da 0:1 a 0:10000 con increment step size di 1;
- add curves → all location → sull'asse delle x si selezioni *frequency* mentre sull'asse delle y *real comp 11 of harmonic stress top layer*;
- nuovamente all location → sull'asse delle x *frequency* mentre sull'asse delle y *imag comp 11 of harmonic stress top layer*;
- fit;
- si setti la scala delle y su 1500 come valore min e 2500 come valore max.

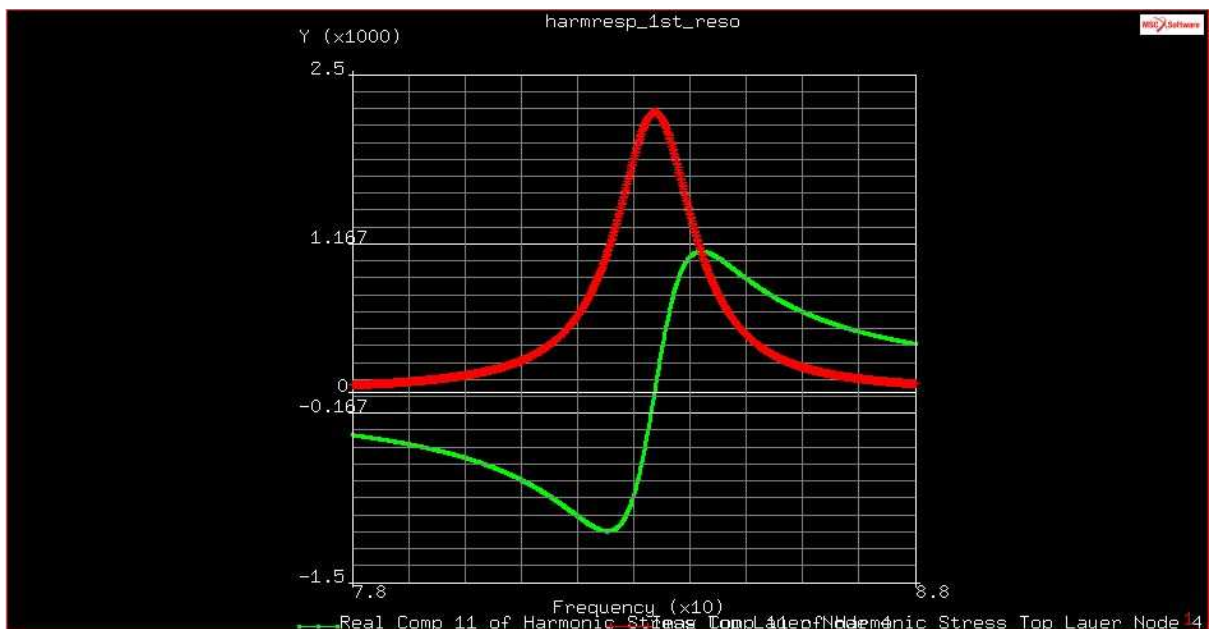


Fig. 11 Risposta in frequenza della struttura lamella