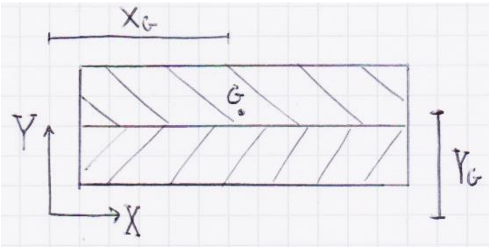
Lezione 28/02/2019 a cura di Neri E. e Traina E.

RICHIAMI SULLA TEORIA DELLA TRAVE

Coordinate del baricentro

Per sezioni multimateriale il baricentro è pesato sul modulo di elasticità assiale E_z, in particolare le coordinate del baricentro risultano:

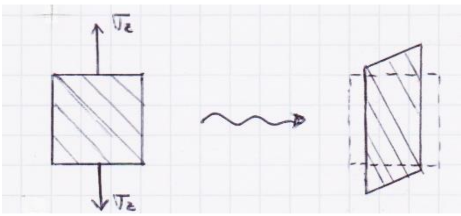


$$X_G = \frac{\iint_a X\, E_Z\, da}{\iint_a E_Z\, da} \; ; \; Y_G = \frac{\iint_a Y\, E_Z\, da}{\iint_a E_Z\, da}$$

Direzione principale di ortotropia

Si definisce DIREZIONE PRINCIPALE DI ORTOTROPIA la direzione parallela alla quale, se applicato uno sforzo σ, la sezione deforma senza presentare γ taglianti, ma solo ε.

Considero un cubetto, in vista laterale, composto da materiale fibroso, con fibre orientate a 45° e soggetto a sollecitazione σ_z => la deformata risulta:



Scegliendo opportunamente il sistema di riferimento cartesiano (ad esempio direzione dell'asse z coincidente con la direzione delle fibre) => la deformata risulta:

Orientazione degli assi lungo una trave

Data una trave con asse baricentrico noto, definisco l'asse z localmente tangente alla curva e normale alla sezione analizzata.

Come definire univocamente gli assi x e y?

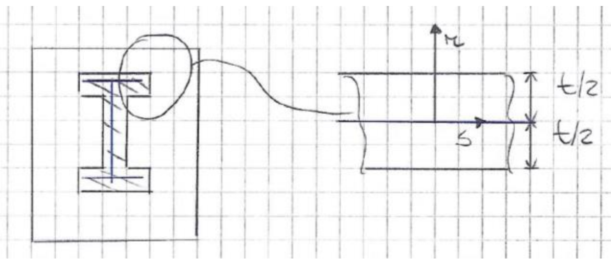
Comunemente diffuso nei codici FEM è il seguente metodo:

- Si definisce un versore **v**, supposto mai parallelo all'asse z
- Si scompone **v** in $\mathbf{v}_\perp$ e $\mathbf{v}_{//}$, componenti rispettivamente perpendicolare e parallela all'asse z
- La direzione di $\mathbf{v}_\perp$ individua la direzione dell'asse x
- Note le direzioni degli assi x e z ne consegue y
- Si determina in questo modo un sistema di riferimento destrorso Gxyz

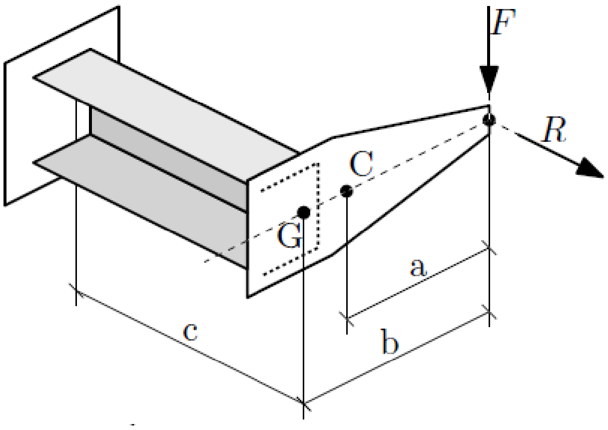
Il procedimento visto sopra è utilizzato per sezioni piene o cave, ma non in parete sottile.

Se si considera una sezione in parete sottile, dopo aver identificato la superficie media, vengono definite due coordinate:

- r $\in [-\frac{t}{2}, \frac{t}{2}]$, con t spessore della parete, che permette di individuare un punto dello spessore della parete partendo dalla superficie media.
- s, coordinata curvilinea che scorre lungo la superficie media della sezione.



Trave tridimensionale

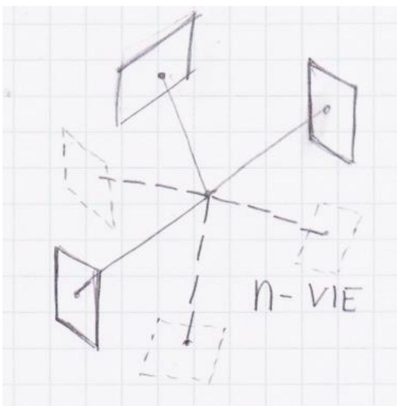


Data una trave tridimensionale con carico generico, la teoria della trave può essere applicata nelle zone sufficientemente lontane dall'incastro e dalla giunzione delle due sezioni.

La valutazione degli stati deformativi e tensionali nell'intorno del giunto non è attendibile mediante l'applicazione della teoria della trave, ma si rimanda la risoluzione a normative specifiche.

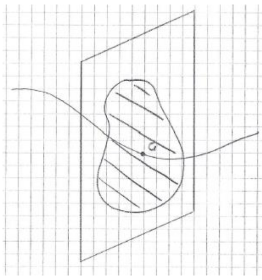
In generale i giunti, pur presentando una certa cedevolezza, vengono supposti rigidi, infatti considerando un generico giunto ad n-vie ne deriva una matrice cedevolezza (rigidezza) quadrata, simmetrica di rango 6(n-1), dove sei righe/colonne vengono eliminate in quanto rappresentano i sei modi rigidi che non contribuiscono alla deformazione del giunto.

Tale semplificazione introduce un errore solitamente trascurabile nelle travi trattate.

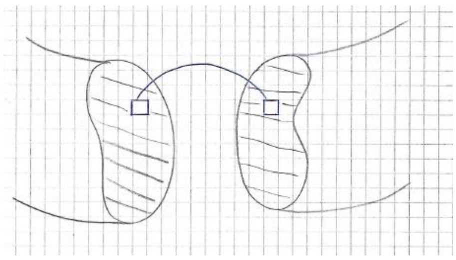


Tensioni

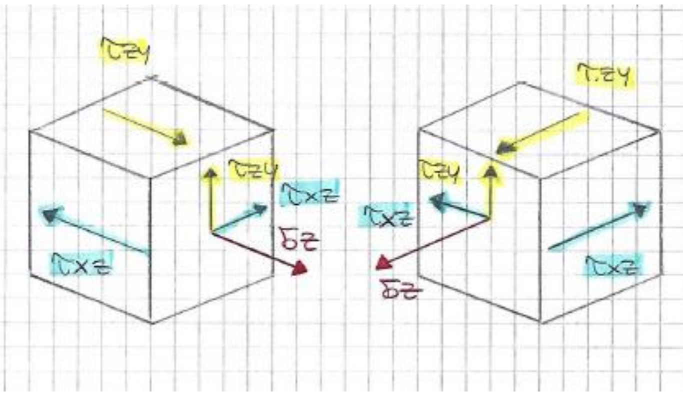
Considero una trave tridimensionale generica:



Sezionandola con un piano ortogonale all’asse z si individuano due sezioni affacciate e consideriamo due cubetti corrispondenti sulle due sezioni:



Le sezioni affacciate dei due cubetti si passano le seguenti tensioni:



Nota 1. Avendo applicato la teoria della trave le tensioni non di interfaccia σ_x , σ_y , τ_{xy} sono nulle.

Nota 2. Le tensioni di interfaccia σ_{zz} , τ_{zx} , τ_{yz} , sono indipendenti per cui le equazioni che le coinvolgono sono disaccoppiabili.

Caratteristiche di sollecitazione

In riferimento ad una sezione di superficie A è possibile valutare:

- Sforzo normale in direzione z:

$$N = \int_{\mathcal{A}} \sigma_{zz} d\mathcal{A}$$

- Taglio:

$$S_y = \int_{\mathcal{A}} \tau_{yz} d\mathcal{A}$$
$$S_x = \int_{\mathcal{A}} \tau_{zx} d\mathcal{A}$$

- Momenti:

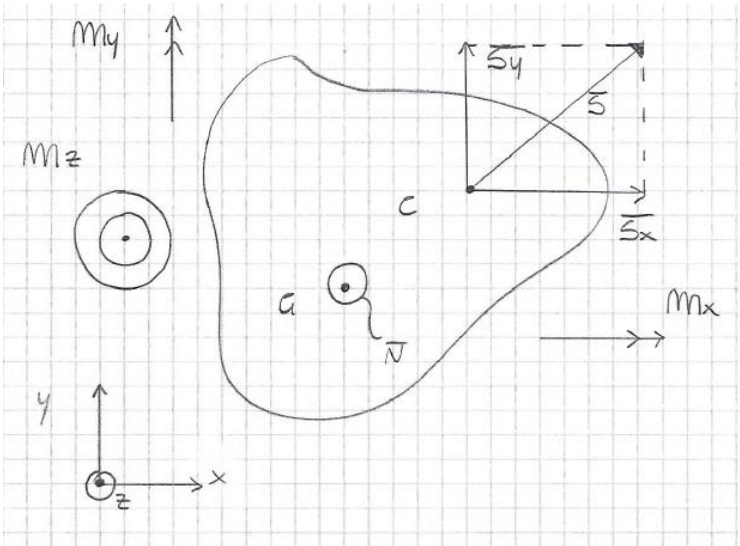
$$\mathcal{M}_x = \int_{\mathcal{A}} \sigma_{zz} y d\mathcal{A}$$
$$\mathcal{M}_y = -\int_{\mathcal{A}} \sigma_{zz} x d\mathcal{A}$$
$$\mathcal{M}_t \equiv \mathcal{M}_z = \int_{\mathcal{A}} \left[\tau_{yz}(x - x_C) - \tau_{zx}(y - y_C)\right] d\mathcal{A}$$

I momenti M_x e M_y sono calcolati in riferimento ai rispettivi assi x e y baricentrici, mentre il momento torcente M_z è calcolato in riferimento ad un asse parallelo all'asse z e passante per il centro di taglio C.

Il centro di taglio è definito come il punto, di una sezione della trave, da cui deve passare la retta d'azione degli sforzi taglianti S_x e S_y, affinché quest'ultimi non producano un momento torcente.

In generale il centro di taglio non coincide con il baricentro

Se la sezione è dotata di un asse di simmetria il centro di taglio C appartiene ad esso, se sono presenti più assi di simmetria il centro di taglio appartiene alla loro intersezione e coincide con il baricentro.



$\bar{N} = N\hat{k}$ APPLICATA IN G

$\bar{T} = S_x \hat{i} + S_y \hat{j}$ APPLICATA IN C