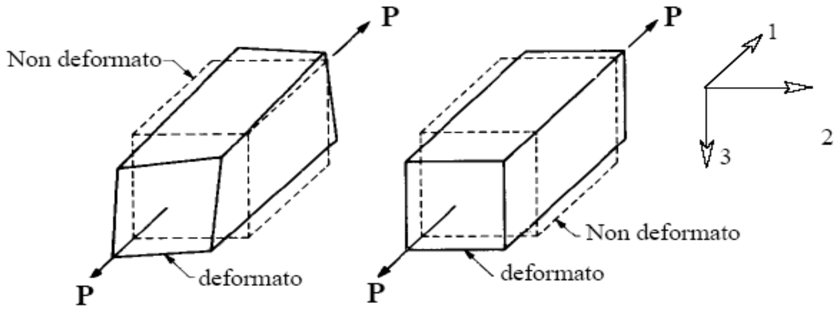
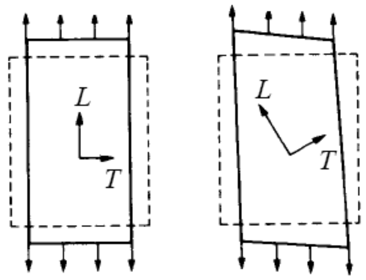
REGOLA DELLE MISCELE, TEORIA DELLA LAMINAZIONE

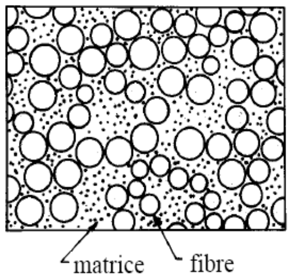
Si va ad analizzare la matrice di legame costitutivo che lega le σ con le ε. Si va a considerare il materiale da isotropo a ortotropo ovvero una lamina che presenti 3 piani di simmetria per le proprietà meccaniche mutuamente ortogonali:

- Sollecitazioni di trazione lungo le 3 direzioni naturali non producono scorrimenti, ma solo deformazioni lineiche



- Lamina trasversalmente isotropa: tutte le direzioni nel piano trasversale sono invarianti





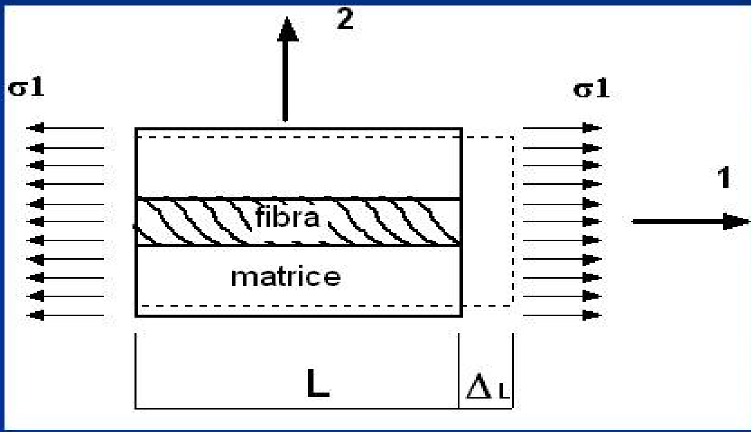
Con la micromeccanica della lamina si vanno a studiare le sue principali proprietà meccaniche a partire da quelle di fibra e matrice e dalla loro interazione:

$$(E_f, E_m, R_m, R_f, v_f, v_m, \rho_f, \rho_m, G_m, G_f \longrightarrow E_1, E_2, R_1, R_2, \rho, v_{12}, G_{12})$$

La lamina viene considerata macroscopicamente omogenea, mentre fibra e matrice sono considerate singolarmente omogenee, elastico-lineari e isotrope. Viene quindi definita la **regola delle miscele** da cui si evince che la proprietà del composito è la media pesata attraverso la percentuale volumetrica delle corrispondenti proprietà di fibra e matrice:

$$\rho_c = \rho_m V_m + \rho_f V_f$$

Micromeccanica della Lamina

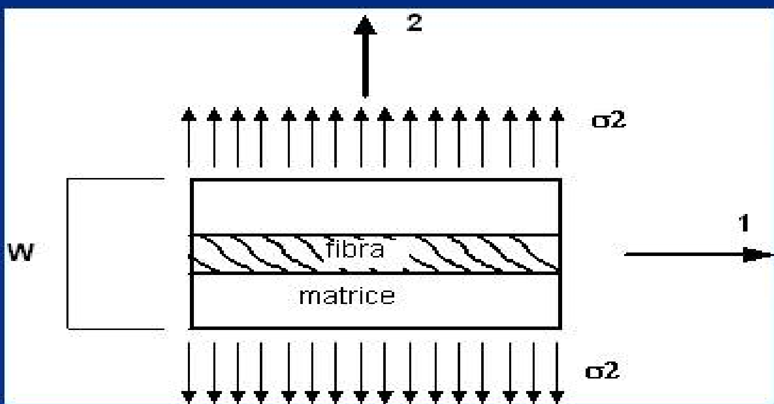


Dir 1: fibra e matrice agiscono in *parallelo*

$$E_1 = E_f \; V_f + E_m \; V_m$$
$$\nu_{12} = V_f \; \nu_f \; + \; V_m \; \nu_m$$

$$R_c = R_f V_f + R^{(f)}_m \; (1\text{-}V_f)$$

Micromeccanica della Lamina



Dir 2: fibra e matrice agiscono in serie

$$E_2 = \frac{E_f \; E_m}{V_f E_m \; + \; V_m E_f}$$

$$G_{12} = \frac{G_m \; G_f}{V_f \, G_m \; + \; V_m \, G_f}$$

$$R_2 = R_m$$

Quando si cambia il materiale da isotropo a ortotropo, quindi, la matrice di legame costitutivo diventerà una **matrice C, 6x6**, di elementi **c(i,j),** ovvero una matrice tridimensionale con $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ e le tre τ che rappresentano le tensioni generalizzate.

$$\sigma_i = C_{ij}\varepsilon_j$$

La domanda da porsi è: quando cambio il materiale, di quanti dati sperimentali necessito per il calcolo? In isotropia si ha bisogno di 2 dati: **Modulo di elasticità** e **Coefficiente di Poisson.** In generale per un materiale anisotropo ci sono 21 costanti per caratterizzare il materiale (c(i,j) è sempre simmetrico e da 36x36 diventano 21 coefficienti che si devono andare a valutare con relative prove sperimentali onerose-> molte recuperabili per simulazioni anisotrope o viscoelastiche). L'ortotropia riduce a 9 le costanti caratteristiche in quanto ho la presenza dei 3 piani mutuamente ortogonali, infatti i termini nulli della matrice sono che rappresentano l'accoppiamento tra tensioni normali e scorrimenti e tra tensioni tangenziali e dilatazioni.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}$$

L'isotropia trasversale riduce ulteriormente il numero delle costanti caratteristiche poiché il comportamento è uguale e di fatto sono uguali $C_{12}, C_{22}, C_{23}, C_{33}, C_{13}$, quindi da 9 diventano 5 costanti caratteristiche. Considerando una lamina sottile, il principio è quello della tensione piana (lungo lo spessore della lamina) universalmente riconosciuto (si parla di piano della lamina). La σ ortogonale di fatto è zero se non è caricata da una pressione, di conseguenza si scende ulteriormente a 4 costanti caratteristiche (E_1 modulo di Young lungo il piano 1 ortotropo ovvero lungo l'asse coincidente con l'asse di ortotropia, E_2 trasversale ortogonale ad esso nel piano della lamina, v_{12} coefficiente di Poisson, G_{12} modulo di elasticità tangenziale sempre nel piano della lamina).

$$\sigma_{33} = 0 \quad , \quad \tau_{23} = 0 \quad , \quad \tau_{31} = 0$$

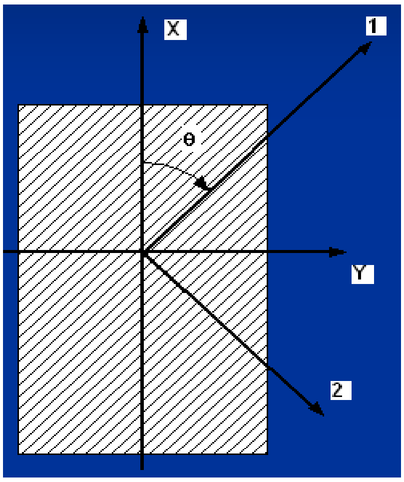
e quindi si ha:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_1 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}$$

$$Q_{11} = \frac{E_{11}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \qquad Q_{12} = \frac{\nu_{12} E_{22}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} = \frac{\nu_{21} E_{11}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}$$

$$Q_{22} = \frac{E_{22}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \qquad Q_{66} = G_{12} \qquad \frac{E_{11}}{\nu_{12}} = \frac{E_{22}}{\nu_{21}}$$

Nel caso della lamina piana (9 cost –ortotropia solida- → 4cost –ortotropia parete sottile-) è importante l’orientazione del carico e degli elementi perché non può non avvenire lungo le due direzioni principali. La legge costitutiva correla deformazioni e tensioni relative agli assi di riferimento naturali di ortotropia, se invece desideriamo le tensioni/deformazioni relative ad un altro riferimento bisognerà operare una trasformazione di coordinate.



$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} M^2 & N^2 & -2MN \\ N^2 & M^2 & 2MN \\ MN & -MN & M^2-N^2 \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = |T|-1 \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = |\mathbf{T}|^{-1} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = |\mathbf{T}|^{-1}|\mathbf{Q}| \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = |\mathbf{T}|^{-1}|\mathbf{Q}||\mathbf{T}| \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

Congiuntamente alla simmetria geometrica e di carico si può parlare di simmetria di materiale, essendo il materiale ortotropo potremmo avere tutto simmetrico tranne le fibre (che possono avere anche direzioni non simmetriche). Nella mesh bisogna sempre definire un asse di riferimento su cui poi definire gli angoli di variazione, questo è quello che fa il software una volta che è stata definita l’orientazione della mesh.

Per quanto riguarda i **criteri di resistenza** per i materiali compositi ve ne sono 2: **Massima Tensione** e **Massima Energia di Distorsione** , mentre per un isotropo si facevano le tensioni equivalenti ovvero Von Mises in uscita confrontate con R_s e R_m e si dava un coefficiente di sicurezza. Diverso invece il caso della fatica.

Criterio della Massima Tensione:

$$\sigma_1 \geq R_1$$
$$\sigma_2 \geq R_2$$
$$|\tau_{12}| \geq R_{12}$$

N.B.

Non tiene conto dell'effetto mutuo delle tensioni

→E' equivalente a tre sotto criteri!

→Buon accordo con lo sperimentale nel caso di stato tensionale mono assiale su 1 o 2

Nel caso di sollecitazione lungo un asse diverso da 1 o 2:

$$\sigma_1 = \sigma_x \cos^2\theta$$
$$\sigma_2 = \sigma_x \sin^2\theta$$
$$\tau_{12} = \sigma_x \sin\theta \cos\theta$$

$$\Rightarrow$$

$$\sigma_x \geq \frac{R_1}{\cos^2\theta} \qquad \sigma_x \geq \frac{R_2}{\sin^2\theta}$$
$$\sigma_x \geq \frac{R_{12}}{\sin\theta \cos\theta}$$

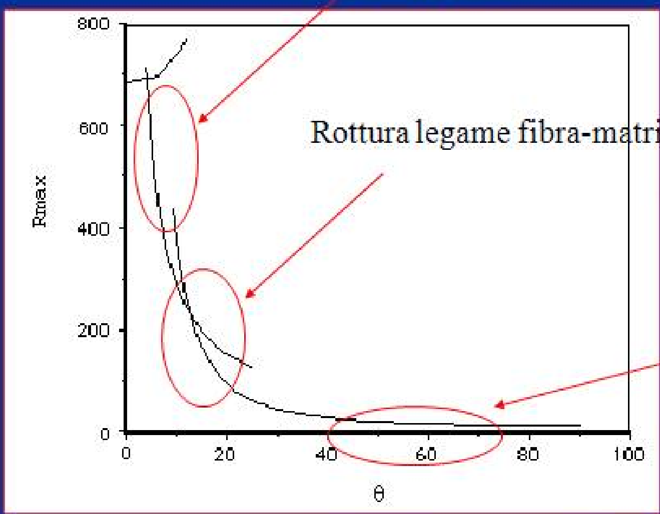
Criterio della Massima Tensione

Variazione del carico critico con la direzione di sollecitazione:

Rottura fibre

Rottura legame fibra-matrice

Rottura matrice



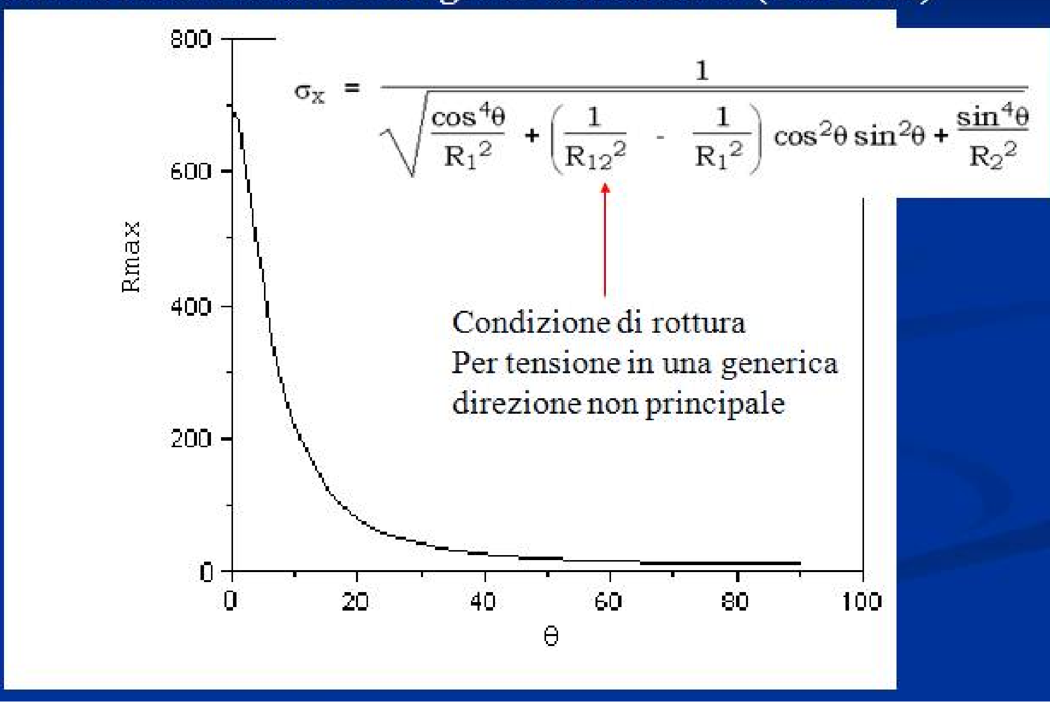
Criterio della Massima Energia di Distorsione (Tsai-Hill)

$$\frac{\sigma_1^2}{R_1^2} - \frac{\sigma_1\sigma_2}{R_1^2} + \frac{\sigma_2^2}{R_2^2} + \frac{\tau_{12}^2}{R_{12}^2} \leq 1$$ ← Condizione di rottura

N.B.
Tiene conto dell'interazione fra le tensioni in direzioni diverse

E' migliore del criterio della massima tensione nel prevedere la rottura in stati composti di sforzo

Criterio della Massima Energia di Distorsione (Tsai-Hill)

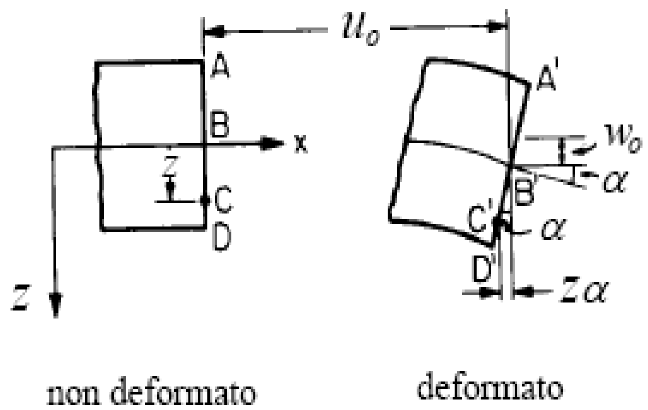


Nell'implementazione avrò tre sottocriteri per il primo criterio (3 if) ed uno solo per il secondo. Per quando riguarda invece la trattabilità matematica il criterio di Massima Energia di Distorsione vince su quello della Massima Tensione poiché è rappresentato da una curva derivabile e discontinua. Questo analogamente a quanto accade con il confronto con Tresca e Von Mises (una ellisse di derivata discontinua contro una di derivata continua).

SEQUENZA DI LAMINE

Una singola lamina di materiale composito ha pochissime applicazioni. Il grosso vantaggio dei materiali compositi è la possibilità di *laminare in sequenza* (impilamento di lamine) in modo da avere rigidezze e resistenze variabili nei piani (anche se non isotrope). Un impilamento di lamine, che possono essere sia unidirezionali o tessuti, danno luogo appunto a una **sequenza di laminazione**.

Ogni lamina è trattata con la **teoria delle piastre**. Per trattare la sequenza di laminazione con questa teoria si fa l'ipotesi che le lamine impilate sono perfettamente incollate tra loro e che lo spessore dell'intero laminato resti comunque molto più piccolo delle altre due dimensioni dello stesso (es. se ogni lamina ha uno spessore di 0.2 mm e si fa un laminato di 20 lamine, lo spessore totale del laminato è 4 mm che deve essere comunque piccolo rispetto alle altre due dimensioni dello stesso). Inoltre, un'altra ipotesi importante nella teoria delle piastre è che il generico segmento rettilineo ortogonale al piano medio del laminato rimane rettilineo e ortogonale al piano medio del laminato anche a deformazione avvenuta.

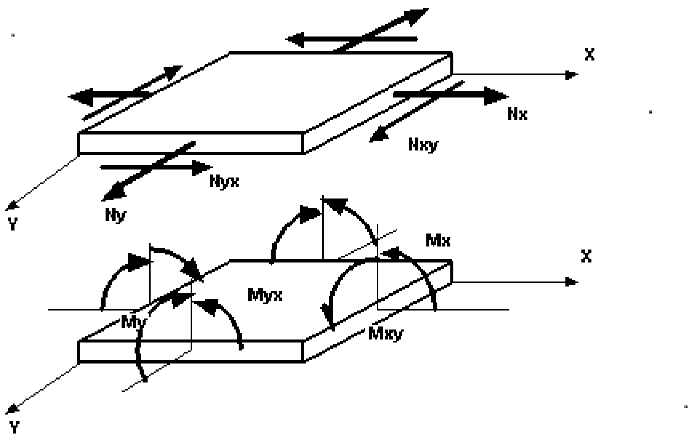


Ricapitolando, le *ipotesi* della *teoria classica della laminazione* sono:

1. Lamine perfettamente incollate tra loro → Continuità di spostamenti e deformazioni all'interfaccia
2. Laminato sottile → Stato Piano di Tensione
3. Il generico segmento rettilineo ortogonale al piano medio del laminato rimane rettilineo ed ortogonale al piano medio anche a deformazione avvenuta ($\Upsilon_{xz}=\Upsilon_{yz}=0$)
4. ε_z trascurabile rispetto a ε_x ed ε_y
5. Spessore laminato piccolo rispetto alle altre dimensioni

In una piastra si possono avere diversi effetti. Si hanno *Effetti Membranali* se agiscono carichi paralleli al piano della piastra e la deformata della stessa sarà entropiano (un esempio di elemento perfettamente membranale è un palloncino gonfio: reagisce a una pressione interna solo con sforzi che stanno nel piano locale, ma non ha resistenza a flessione) ; si hanno *Effetti Flesso-Membranali* se la piastra presenta una rigidezza flessionale; infine, si hanno *Effetti Flesso-Membranali-Taglianti* se la piastra presenta anche una rigidezza tagliante.

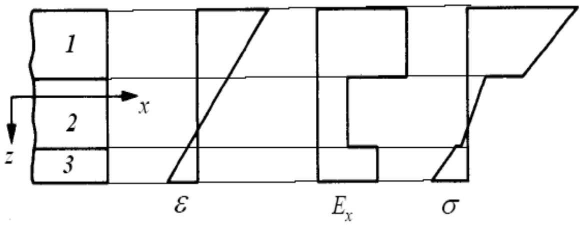
Esistono anche materiali che cambiano la loro rigidezza in funzione di quanto sono tirati (ad esempio, le funi).



I materiali compositi vengono trattati come piastre flesso-membranali, ovvero in grado di reagire sia a sforzi che stanno nel piano della piastra sia a sforzi ortogonali al piano della piastra. Possono essere trattati anche come elementi puramente membranali ma devono essere opportunamente vincolati, altrimenti risulterebbero labili.

Nella teoria delle lamine, per l'ipotesi secondo cui il generico segmento rettilineo ortogonale al piano medio del laminato rimane rettilineo ed ortogonale al piano medio anche a deformazione avvenuta (3.) la deformazione deve essere necessariamente lineare. Se si considerano tre lamine impilate con direzione delle fibre diverse tra loro, si hanno Moduli di Young diversi lungo una direzione x, dunque lo stato tensionale, anche se è lineare, non è più continuo ma è discontinuo (perché il modulo di Young cambia a seconda della lamina). Pertanto è preferibile disporre le fibre nella direzione del carico in modo da aumentare il Modulo di Young in quella direzione e quindi aumentare la rigidezza.

Per questo motivo nei materiali compositi vengono usati dei distanziali (o riempitivi) per creare inerzia.



Quando si tratta una sequenza di lamine bisogna analizzare lo stato tensionale lamina per lamina perchè non è detto che lo stato tensionale massimo sia abbia sulle superfici più esterne.

Il FEM per materiali compositi è usato per lo studio statico di alcuni componenti (progettazione a rigidezza) ma non per lo studio dinamico degli stessi. Infatti i crash sui materiali compositi vengono eseguiti sperimentalmente in quanti i risultati dati dal FEM in questo caso sono di un 30÷40% lontani dal caso reale.