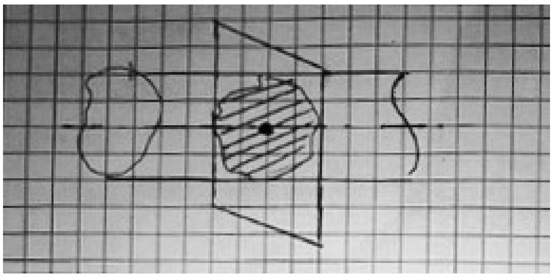
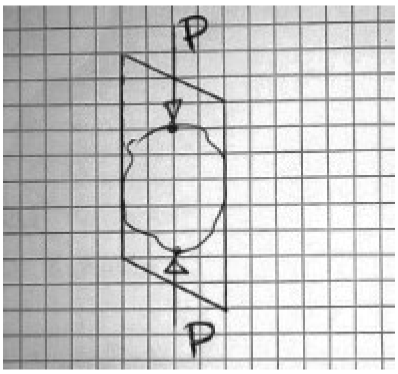
TEORIA DELLE PIASTRE SOTTILI

Alcuni corpi possono essere trattati in via semplificata come se fossero unidimensionali; per fare ciò occorrono delle ipotesi cinematiche che colleghino il tridimensionale con l'unidimensionale: infatti, un oggetto è definibile trave quando una dimensione è molto più estesa delle altre due.
Il modello strettamente definito vale per travi infinitamente lunghe, qualunque rapporto inferiore ad infinito induce un errore che cresce man mano che la dimensione molto più lunga delle altre due diventa comparabile. Il rapporto tra la quantità che deve essere grande e quella che deve essere piccola è relativo alla quantità di errore che tollero nel modellare quel oggetto come trave.
Definisco un'asse (se non riesco a definire un'asse non ho a che fare con una trave), poi creo dei piani normali all'asse e li interseco con il corpo ottenendo delle sezioni e suppongo che tutto il materiale che trovo sull'indeformata di una sezione, dopo la deformata rimanga sempre su quella sezione.

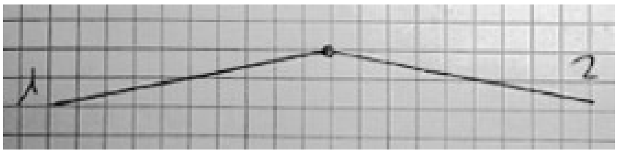


La rototraslazione del punto di intersezione tra asse della trave e il piano su cui costruisco la sezione, descrive completamente il moto della sezione: ai fini della deformazione di sforzo normale e momento flettente considero il moto di ogni punto della sezione come moto di corpo rigido che segue le rototraslazioni del punto sull'asse, in questo modo fornisco un'ipotesi cinematica di moto di corpo rigido (comoda per scrivere le equazioni se si trascura l'effetto Poisson). Ci sono anche moti di entro sezione che però non vengono considerati.
Consideriamo le sezioni libere di contrarsi come pare a loro (fenomeno che non ci sporca i calcoli). Se la sezione fosse modellata con elementi tridimensionali richiederebbe la meshatura (23 nodi). Per definire il moto della sezione abbiamo bisogno di 23 x (3 gdl) = 69 incognite.
Se invece consideriamo la rototraslazione del punto sull'asse abbiamo solo 6 gdl = 6 incognite.



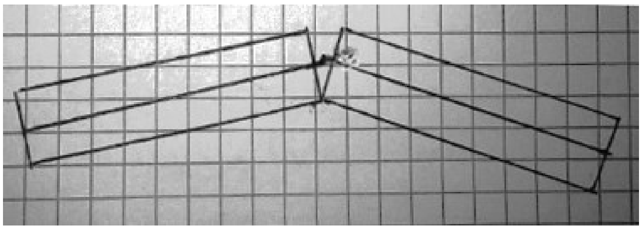
Supponiamo di avere una forza P: se lavoro in Teoria dell'elasticità tridimensionale, riesco a cogliere che le due forze tendono a schiacciare la sezione generando uno stato deformativo. Se procedo con la Teoria della trave devo ridurre le due forze allo stesso punto sull'asse: le due forze sono uguali e contrarie quindi appena le riduco allo stesso punto si annullano. L'oggetto modellato come trave soggetto a queste due forze non presenta deformazioni e tensioni: se viene modellata come tridimensionale posso cogliere la deformazione, ma perdo tutti i moti che non sono rappresentabili dal modello semplificato.

Quando utilizzo degli oggetti che hanno dimensionalità inferiore a quella dello spazio in cui si trovano (ad esempio 1d nel 2d, 2d nel 3d, ...) utilizzo le rotazioni come grado di libertà. Viceversa non ho rotazioni, come grado di libertà, quando modello un oggetto costruito con tetraedri nello spazio oppure come triangoli nel piano (perché hanno la stessa dimensionalità dello spazio in cui sono definiti). Un elemento trave(1d) sul piano(2d), secondo questa regola, porta le rotazioni.
E' difficile costruire una Teoria della trave senza le rotazioni, potrei farlo solo a patto di considerare gli spostamenti di due punti sulla sezione. Se si hanno due elementi finiti, le quantità che risultano continue tra elemento uno e elemento due sono quelle definite dal nodo comune.

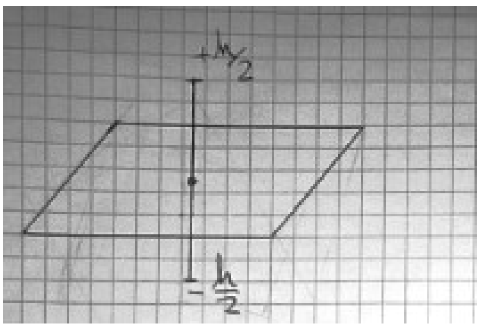


Se non si mettono le rotazioni non viene garantita continuità di rotazione tra i due elementi. Bisogna definire dei nodi con grado di libertà anche di rotazione, in questo modo i due elementi hanno continuità l'un l'altro perché tutti e due approcciano sullo stesso nodo che ha una certa rotazione. Se il nodo comune manca di un gdl (rotazione), sarebbe complicato definire la continuità di rotazione tra un elemento e l'altro. Il nodo quindi collega i due elementi, se porta solo la traslazione siamo sicuri che tra i due elementi c'è continuità di traslazione.

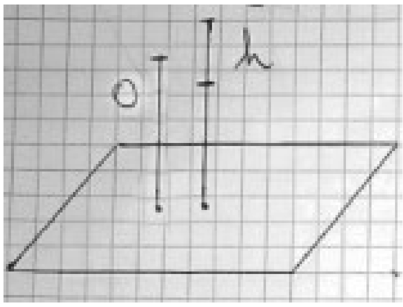
Nel caso della trave i punti sull'asse sono rappresentativi del moto dei punti su tutta la sezione. Se ho rotazione comune questa configurazione è impossibile:



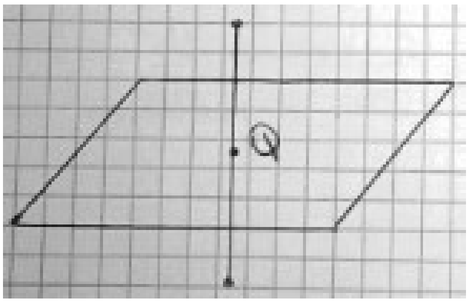
Esistono corpi che non sono modellabili come travi ma hanno una dimensione più piccola rispetto le altre due. Sono modellabili come piastra, cioè corpi per i quali è facilmente definibile un piano o una superficie media. Se non si riesce a definire una superficie media allora questa Teoria non si può applicare. Dopo aver definito il piano medio, il corpo è descrivibile partendo da un punto qualunque della superficie media e definendo un intervallo:



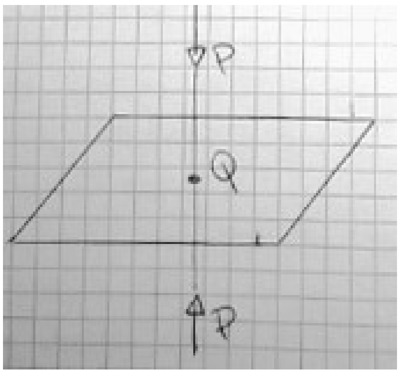
per ogni punto della superficie media, definisco un intervallo lungo un segmento perpendicolare, entro cui sta il materiale elastico dell' oggetto. Rappresento uno scostamento (offset) O che è definito come la distanza tra il punto sul piano di riferimento e il punto a metà spessore.



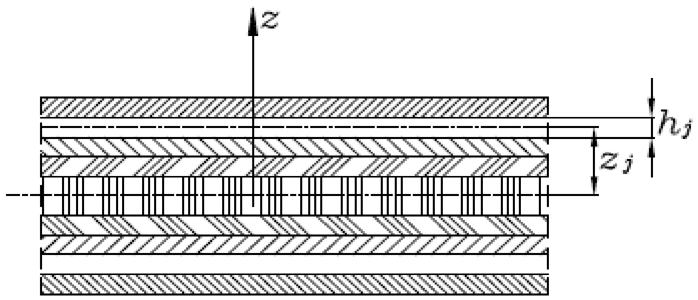
Nel caso in cui il piano sia una delle due superfici interna o esterna e non il piano medio, l'offset è pari ad $\frac{h}{2}$. Per ogni punto Q della superficie media definisco sulla normale alla superficie passante per Q, un segmento entro cui è collocato materiale elastico (fuori dall'intervallo da $+\frac{h}{2}$ a $-\frac{h}{2}$ c'è aria). Si suppone che il materiale che si trova sul segmento nell'indeformata, rimanga lì anche in configurazione deformata (vincolo cinematico). Il punto Q che nasce sul piano medio, non si stacca dal piano medio.



Se applico due forze (con il vincolo che due punti presi sul segmento non varino la propria distanza dal punto medio) non sono in grado di creare sollecitazione sulla struttura.



La piastra è rigida a schiacciamenti normali al piano medio. In un processo di laminazione ottengo un oggetto più sottile, macroscopicamente più lungo che spesso. Tutta la laminazione si gioca su carichi che comprimono la piastra normalmente al suo piano medio, per questo non può essere simulata con elementi piastra. Lo schiacciamento violerebbe l'ipotesi per cui i punti non variano la distanza rispetto il piano medio, per questo non può essere modellato con elementi trave.

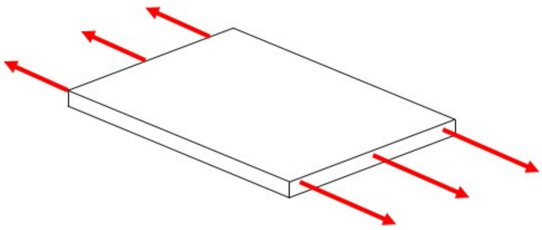


Un punto P, che nasce sul segmento nell'indeformata, se è vincolato a rimanere sul segmento normale anche nella deformata, allora non presenta deformata tagliante.

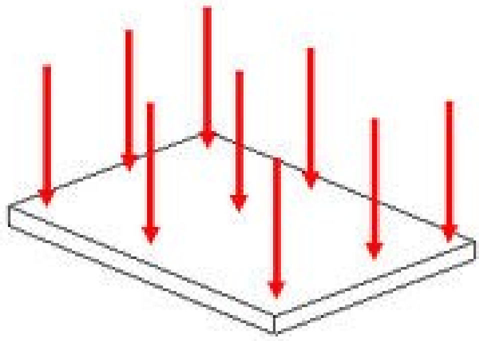
Se un segmento che nasce normale al piano medio nell'indeformata deve rimanere normale anche nella deformata, allora ottengo un oggetto che può deformarsi solo in maniera flessionale e non tagliante. Viceversa se dico che l'oggetto deve rimanere un segmento (non può avere una deformata a S), P rimane allineato a Q e a tutti gli altri punti, ma il segmento può scostarsi dalla normale: allora lo scostamento è una deformata γ di tipo tagliante (piastra deformata puramente a taglio, incastrata ad una estremità).

Se impongo che il segmento normale alla superficie, dopo la deformata rimanga normale, allora ottengo una piastra puramente flessionale che non deforma a taglio (piastre alla Kirchhoff). Esistono le piastre alla Mindlin che sono deformabili a flessione più a taglio, in questo caso i segmenti che sono normali al piano medio possono inclinarsi rispetto alla normale per deformazioni taglianti. Le piastre possono anche deformarsi allungandosi e non flettendo! Quindi le piastre alla Mindlin sono deformabili a flessione + taglio + membranale (entro piano). Le piastre alla Kirchhoff sono deformabili a flessione + membranale.

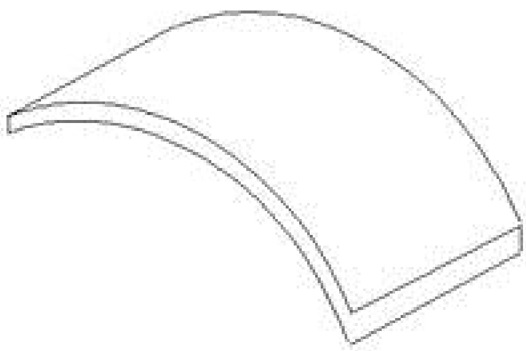
LASTRA (plate): oggetto deformato in forma puramente membranale da carichi agenti entro piano



PIASTRA (plate): oggetto che presenta superficie media piana, caricato da forze che agiscono fuori dal piano e deformato fuori dal piano.

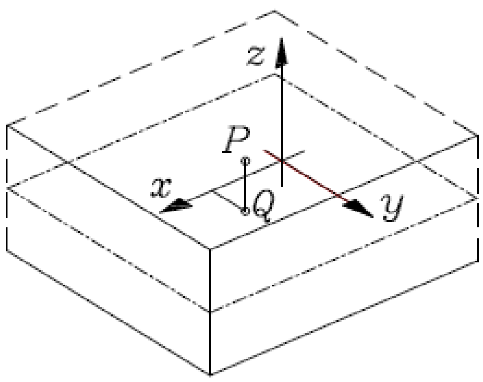


GUSCIO (shell): oggetto in cui la superficie media non è piana. Si ha sempre deformazione di tipo flessionale. Se si prende un concio infinitesimo di guscio può essere trattato come piastra.

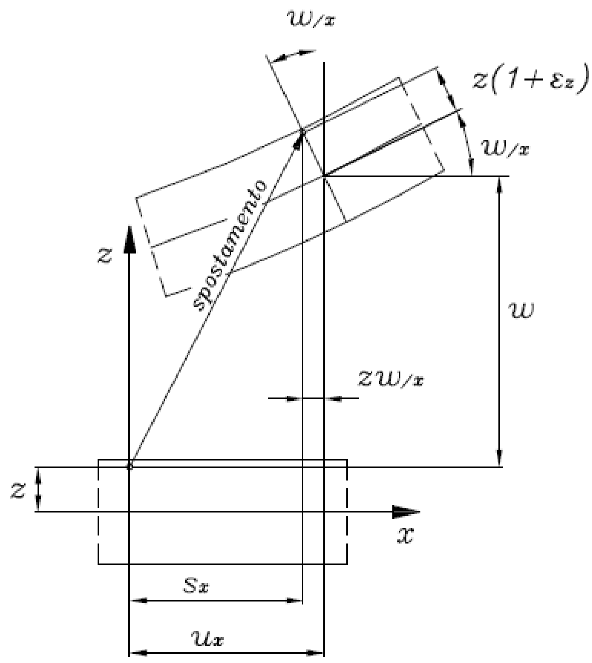


- Si considera l'ipotesi di Kirchhoff (senza deformazione tagliante).

Si disegna una superficie media che nell'intorno di un punto può essere considerata uguale al piano tangente.



Considero un punto Q sul piano medio, definisco un asse z normale al piano e in maniera arbitraria ricavo un asse x e y (l'asse z è univoco mentre x e y sono definiti a meno di un coefficiente arbitrario). Ora considero un punto P che si trova entro il materiale elastico ad un certa distanza z da Q. Proietto l'oggetto sul piano xz:



Come nella trave, cerchiamo di definire lo spostamento di P in funzione dello spostamento di Q:
- P si sposta di $S_X\ S_Y\ S_Z$;
- Q si sposta di $u_x\ u_y\ w$.

Definisco lo spostamento del punto P in funzione delle rototraslazioni del punto Q (procedo per via geometrica): nel caso delle piastre alla Kirchhoff, le rotazioni e gli spostamenti normali al piano non sono quantità indipendenti, ma si considerano le rotazioni a partire dalle derivate degli spostamenti. Manca una deformata tagliante e quindi le rotazioni e gli spostamenti fuori piano non sono entità indipendenti. Posso rappresentare l'angolo di rotazione come tangente della funzione spostamento verticale:

$$w_{/x} = \frac{\partial w}{\partial x}$$

Quindi chiamo la rotazione:

$$\alpha = \frac{\partial w}{\partial x}$$

(derivata parziale della funzione w che definisce gli spostamenti normali al piano dei punti Q in direzione x).
Una volta definito l'angolo α in funzione della pendenza dello spostamento normale al piano dei punti Q considerati uno dopo l'altro lungo x, definisco uno spostamento correttivo di P rispetto a Q come:

$$-z\frac{\partial w}{\partial x} = -z\alpha$$

Lo spostamento di P lungo x è dato da:

$$S_X = u_x - z\frac{\partial w}{\partial x}$$

ed è uguale allo spostamento lungo x di Q meno una quota pari alla rotazione del segmento (ipotesi di piccole rotazioni e di piastra alla Kirchhoff).
Lo spostamento lungo y di P è dato da:

$$S_y = u_y - z\frac{\partial w}{\partial y}$$

Lo spostamento lungo z di P è dato da:

$$S_z = w$$

(in questo caso trascuro il termine correttivo in quanto termine del secondo ordine).

Bisogna considerare che z non varia sotto l'ipotesi che la distanza di P rispetto a Q rimane costante. In questo modo abbiamo definito il campo degli spostamenti del materiale elastico.

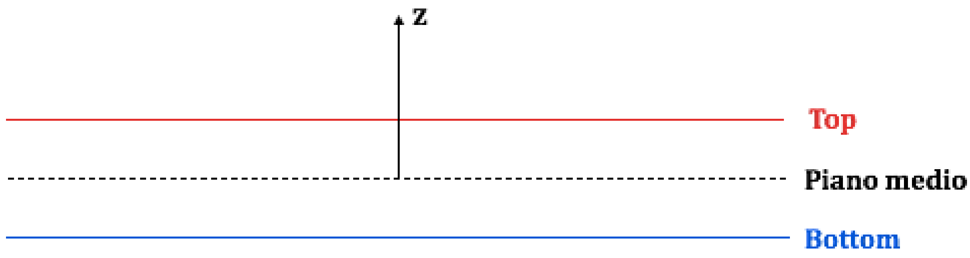
Una volta trovati gli spostamenti, nel caso di piastre sottili alla Kirchhoff in stato piano di tensione, le deformazioni membranali del generico punto P vengono calcolate in funzione delle componenti dello spostamento del punto Q sul piano medio (scelto come piano di riferimento per semplicità):

$$\varepsilon_x = \frac{\delta s_x}{\delta x} = \frac{\delta u_x}{\delta x} - z\frac{\delta^2 w}{\delta x^2} = \bar{\varepsilon_x} + zK_x$$

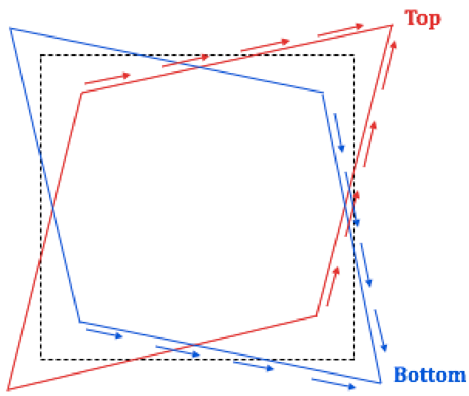
$$\varepsilon_y = \frac{\delta s_y}{\delta y} = \frac{\delta u_y}{\delta y} - z\frac{\delta^2 w}{\delta y^2} = \bar{\varepsilon_y} + zK_y$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\delta s_x}{\delta y} + \frac{\delta s_y}{\delta x} = \frac{\delta u_x}{\delta y} + \frac{\delta u_y}{\delta x} - 2z\frac{\delta^2 w}{\delta x \delta y} = \overline{\gamma_{xy}} + zK_{xy}$$

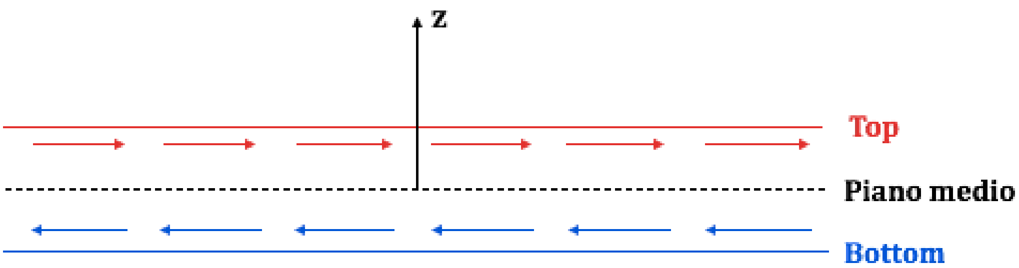
avendo indicando con $\bar{\varepsilon_x}, \bar{\varepsilon_y}$ e $\overline{\gamma_{xy}}$ le deformazioni membranali del piano medio e con $K_x\ K_y$ e K_{xy} le curvature flessionali (le prime due) e torsionali (l'ultima). Analizziamo la deformazione torsionale della piastra.



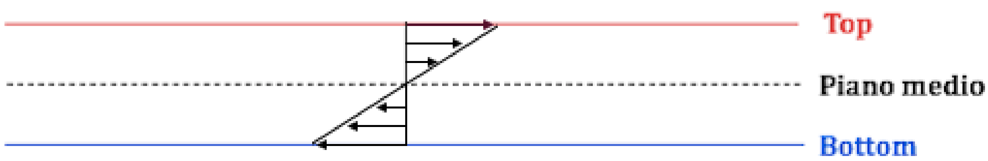
Vediamo un elemento di piastra dall'alto. La deformazione tagliante è data dalla somma di un termine dato dalla deformazione membranale del piano medio e da un termine lineare in z. Supponiamo per semplicità che la deformazione nel piano medio sia nulla.



Nell'immagine è visualizzato il passaggio dalla configurazione indeformata (quadrato tratteggiato in nero) alla deformata torsionale (top e bottom si deformano come un rombo, mentre il piano medio, per ipotesi, non si deforma). Inoltre sono mostrate le tensioni necessarie per ottenere tale configurazione.



La distribuzione delle tensioni di taglio tau generano un vettore coppia uscente dal piano della piastra che provocano la torsione della piastra stessa.



Andando ad analizzare gli spostamenti, lineari in z, dei punti appartenenti ad una retta ortogonale al piano medio, si può notare che il loro andamento a farfalla coincide con una rotazione torsionale intorno ad un asse uscente dal piano della piastra.

Scrivendo le deformazioni in forma matriciale, ottengo:

$$\underline{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{\varepsilon_x} \\ \overline{\varepsilon_y} \\ \overline{\gamma_{xy}} \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_{xy} \end{bmatrix} = \underline{\overline{\varepsilon}} + z\underline{K}$$

Per il calcolo dello stato tensionale si fanno le seguenti ipotesi:

- legame tensione-deformazione elastico lineare;
- materiale della piastra omogeneo ed isotropo;
- stato piano di tensione, così che le componenti di tensioni σ_z, τ_{zx} e τ_{zy} siano approssimabili a zero, che va al passo con l'ipotesi di libera strizione in spessore (ossia non c'è nessuna entità che impone allo spessore di non variare).

Quindi si ha:

$$\underline{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \underline{D}\ \underline{\varepsilon} = \underline{D}\ \underline{\overline{\varepsilon}} + \underline{D}\ z\underline{K}$$

avendo indicato con $\underline{D}$ la matrice elastica di legame tensione-deformazione:

$$\underline{D} = \frac{E}{1-v^2} \begin{bmatrix} 1 & v & 0 \\ v & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-v}{2} \end{bmatrix}$$

Anche in questo caso le tensioni sono date dalla somma di un termine, dato dal prodotto matriciale $\underline{D}\ \underline{\overline{\varepsilon}}$, che rappresenta le tensioni nel piano medio, calcolate nell'ipotesi di materiale omogeneo e isotropo, e di un termine che varia linearmente lungo lo spessore della piastra stessa.

Pertanto, possiamo dire che le deformazioni hanno sempre un andamento lineare lungo le spessore; le tensioni hanno un andamento lineare lungo lo spessore solamente se il legame costitutivo è omogeneo lungo i piani della piastra.

In analogia con la teoria della trave, è conveniente raggruppare le tensioni in risultanti: nella trave, ad esempio,

- si considerano le tensioni in direzione assiale e le si integrano sulla sezione per ricavare una forza che prende il nome di Sforzo Normale;
- si considerano le tensioni in direzione assiale e le si moltiplicano per un braccio per ricavare il Momento Flettente.

Quindi, solitamente si parte dalla cinematica definita sulla sezione e si vuole tornare alle forze ed ai momenti risultanti sempre definiti sulla sezione: pertanto, in analogia con l'integrazione che si fa' sulla sezione di quello stato tensionale nel caso della trave, nel caso della piastra si va ad integrare quello stato tensionale lungo lo spessore. Così facendo, si ottengono delle risultanti: in particolare

$$q_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_x dz \ \left[\frac{N}{mm}\right]$$

$$q_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_y dz \ \left[\frac{N}{mm}\right]$$

$$q_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{xy} dz \ \left[\frac{N}{mm}\right]$$

dove q_x, q_y e q_{xy} prendono il nome di *flussi degli sforzi*. Che cosa sono q_x, q_y e q_{xy}? Possiamo immaginarle così: prendiamo la nostra piastra e tagliamola con un piano di sezione che, realizziamo ad esempio q_x, tagliamola con un piano di sezione normale all'asse x. Q è il punto nel quale viene effettuato l'integrale, quindi q_x è definito nel punto Q e, implicitamente, sul segmento normale all'asse x lungo lo spessore. Chiaramente, ogni altro punto della piastra avrà dei q_x, q_y e q_{xy} differenti. Presi nell'intorno del segmento q_x un tratto che lungo il taglio è unitario, otteniamo che il q_x è la risultante delle tensioni in direzione x su quella porzione unitaria di taglio. Cioè, lungo questa sezione creata sulla piastra, ogni mm di lunghezza lungo la sezione porta ad una risultante di carico che è q_x. Se vediamo la piastra dall'alto, creiamo un taglio di dimensione unitaria e ci chiediamo quant'è la risultante delle forze che passa a cavallo di quel taglio, la risultante è appunto il q_x calcolato a metà taglio. Viene chiamato flusso degli sforzi in quanto è una quantità di tensione per unità di area. È analogo allo sforzo normale nel senso che lo sforzo normale è chiedersi qual è la risultante delle tensioni che passa per una data sezione. Qui purtroppo la sezione è definita solo se date una lunghezza al taglio su cui sezionate. q_y è la stessa cosa ma con un taglio effettuato normale all'asse y e, q_{xy} è un termine misto che è la risultante delle τ_{xy} agenti lungo quell'unità di lunghezza di sezione media.

Se integro tra $-\frac{h}{2}$ e $+\frac{h}{2}$, otteniamo che la quota lineare in $\underline{\sigma} = \underline{D}\,\underline{\bar{\varepsilon}} + \underline{D}\,z\underline{K}$ si auto elide, nel senso che per ogni contributo positivo sugli spessori z negativi ho un eguale contributo positivo sugli spessori z positivi. Quindi, per materiali omogenei isotropi possiamo scrivere

$$q_x = \sigma_x|_{piano\ medio} \cdot h$$

Nella stessa maniera posso procedere con i momenti e definire i *flussi dei momenti*

$$m_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_x \cdot z\,dz \quad \left[\frac{N \cdot mm}{mm_{taglio}}\right]$$

$$m_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_y \cdot z\,dz \quad \left[\frac{N \cdot mm}{mm_{taglio}}\right]$$

$$m_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{xy} \cdot z\,dz \quad \left[\frac{N \cdot mm}{mm_{taglio}}\right]$$

Allo stesso modo queste quantità raccolgono il momento risultante: ad esempio, m_x è il momento risultante di questa distribuzione di sigma su un taglio di lunghezza unitaria effettuato in direzione normale ad x sulla piastra. È una specie di momento flettente per unità di lunghezza. Concettualmente è il momento che viene trasmesso su una sezione di lunghezza unitaria. m_x ed m_y sono dei momenti flettenti, m_{xy} è un momento torcente.

σ_x è definito in funzione di una σ media e delle curvature: svolgendo i calcoli si ottiene che

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_{xy} \end{bmatrix} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \underline{D} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} dz = \underline{D} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} dz = \underline{D} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \left(\begin{bmatrix} \bar{\varepsilon}_x \\ \bar{\varepsilon}_y \\ \bar{\gamma}_{xy} \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_{xy} \end{bmatrix} \right) dz \\
&= \underline{D} \left(\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \begin{bmatrix} \bar{\varepsilon}_x \\ \bar{\varepsilon}_y \\ \bar{\gamma}_{xy} \end{bmatrix} dz + \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \begin{bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_{xy} \end{bmatrix} z dz \right) = \underline{D} \left(\underline{\bar{\varepsilon}} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} 1 dz + \begin{bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_{xy} \end{bmatrix} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} z dz \right) \\
&= \underline{D} \cdot \underline{\bar{\varepsilon}} \cdot h
\end{aligned}$$

in quanto i contributi associati a quote lineari si elidono lasciando solamente i contributi associati al piano medio che, in quanto tali, non variano in z.

Quindi, per materiali omogenei isotropi, Q è definito a partire dalle sole deformazioni al piano medio moltiplicate per la matrice legame costitutivo per l'entità dello spessore.

Allo stesso modo possiamo considerare i momenti. σ_x ha due componenti: una associata al piano medio e una variabile in z. Quella associata al piano medio sparisce perché viene integrata per un $z\,dz$ da $-\frac{h}{2}$ a $+\frac{h}{2}$. Viceversa, il termine delle curvature è proporzionale a z: quindi le curvature sono moltiplicate per uno $z^2 dz$ ed integrate da $-\frac{h}{2}$ a $+\frac{h}{2}$: quindi, nel caso dei momenti, a sparire è il contributo del piano medio; rimane solo la quota variabile lineare. In questo caso trovo che il vettore dei momenti è dato da

$$\begin{bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \underline{D} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} z\,dz = \underline{D} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} z\,dz = \underline{D} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \left(\begin{bmatrix} \overline{\varepsilon_x} \\ \overline{\varepsilon_y} \\ \overline{\gamma_{xy}} \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_{xy} \end{bmatrix} \right) z\,dz$$

$$= \underline{D} \left(\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \begin{bmatrix} \overline{\varepsilon_x} \\ \overline{\varepsilon_y} \\ \overline{\gamma_{xy}} \end{bmatrix} z\,dz + \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \begin{bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_{xy} \end{bmatrix} z^2 dz \right) = \underline{D} \left(\overline{\varepsilon} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} z\,dz + \begin{bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_{xy} \end{bmatrix} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} z^2\,dz \right)$$

$$= \underline{D} \cdot \begin{bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_{xy} \end{bmatrix} \cdot \frac{h^3}{12}$$

per cui, risulta che costruendo un legame tra flussi di sforzo e di momento e deformazioni del piano medio e curvature, ottenendo un legame matriciale del tipo

$$\begin{bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_{xy} \\ m_x \\ m_y \\ m_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{q} \\ \underline{m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\varepsilon} \\ \underline{K} \end{bmatrix}$$

dove

- $A = \underline{D} \cdot h$;
- B rappresenta il legame misto tra i termini $\underline{q}$ e $\underline{K}$ ed i termini $\underline{m}$ e $\underline{\varepsilon}$: poiché $\underline{q}$ non è funzione delle curvature ed $\underline{m}$ non è funzione delle deformazioni del piano medio, necessariamente deve valere $B = 0$;
- $C = \underline{D} \cdot \frac{h^3}{12}$.

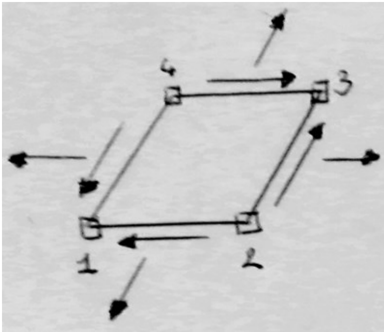
In questo modo, troviamo che per le piastre:

- La matrice A lega i flussi di sforzo, ovvero gli equivalenti degli sforzi normali e del taglio, agli allungamenti del piano medio. La matrice A risulta proporzionale alla matrice $\underline{D}$ di legame elastico ed allo spessore alla prima potenza: pertanto, per ottenere una data deformazione $\overline{\varepsilon}$ del piano medio servono delle forze su unità di lunghezza della linea di sezionamento che risultano essere proporzionali allo spessore. Pertanto, la rigidezza di una piastra alle sollecitazioni membranali è proporzionale allo spessore, quindi per allungare una piastra di una data quantità è necessario applicare delle forze che varino proporzionalmente al suo spessore.
- La matrice C lega i flussi dei momenti, ovvero gli equivalenti momenti torcenti e flettenti, alle rotazioni delle sezioni. La matrice C risulta proporzionale alla matrice $\underline{D}$ di legame elastico ed allo spessore alla terza potenza: pertanto, per ottenere una data rotazione della sezione servono dei momenti flettenti su unità di lunghezza della linea di sezionamento che risultano essere proporzionali al cubo dello spessore. Pertanto, la rigidezza di una piastra alle sollecitazioni membranali è proporzionale allo spessore,

quindi per allungare una piastra di una data quantità è necessario applicare delle forze che varino proporzionalmente al suo spessore.

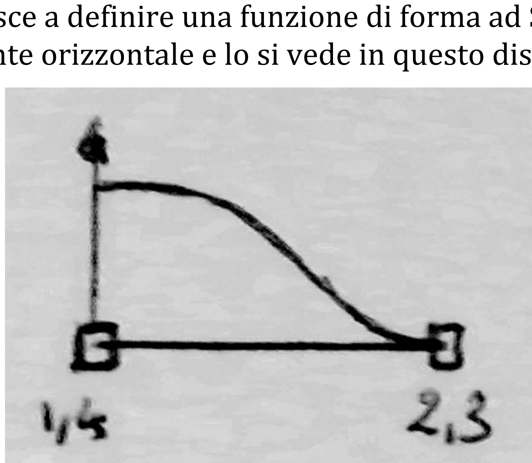
Questo è molto importante in quanto, se sappiamo che la struttura a piastra lavora completamente a sforzo membranale per raddoppiare la rigidezza è sufficiente raddoppiarne lo spessore, il che implica che il rapporto tra rigidezza e massa è costante e massa e rigidezza crescono allo stesso modo.
Se invece la struttura a piastra lavora a flessione, per dimezzarne la freccia è necessario aumentarne lo spessore di $\sqrt[3]{2}$, il che implica che il rapporto tra rigidezza e massa è sempre costante ma la rigidezza cresce molto più velocemente della massa. Ovviamente, questo non vale se il materiale non vale se il materiale non è ne omogeneo ne isotropo.

Nel codice agli elementi finiti sono implementati due tipi di elementi: elementi alla Kirchhoff ed elementi alla Mindlin. Ad esempio, in Marc, l'elemento alla Kirchhoff isoparametrico a 4 nodi, che nello spazio risulta essere un elemento di questo tipo



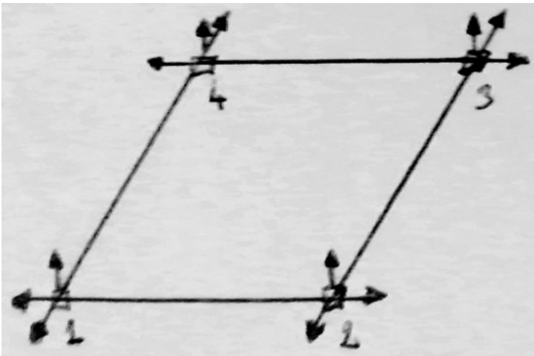
è l'elemento 139 della libreria del Marc: se viene caricato in forma membranale si comporta esattamente come fosse un elemento isoparametrico a 4 nodi in tensione piana. Questa caratteristica è comune anche all'elemento alla Mindlin. Lavorando a flessione, si ha la possibilità di definire per ogni nodo 3 spostamenti e 3 rotazioni. Consideriamo l'esempio su un piano:

Avendo a disposizione sia spostamenti che rotazioni nodali, posso definire una varietà di funzioni di forma associate sia agli spostamenti che alle rotazioni. In particolare, si hanno funzioni di forma definite per spostamenti senza rotazione dei nodi 1 e 4 tenendo fermi i nodi 2 e 3. In questo modo si riesce a definire una funzione di forma ad S di questo tipo: la non rotazione mi da' una tangente orizzontale e lo si vede in questo disegno:



Si ha anche un'atra funzione di forma analoga, associata alle sole rotazioni, in cui i nodi 1 e 4 non si spostano ma ruotano di una quantità unitaria e i nodi 2 e 3 non si spostano e non ruotano. La deformazione è di natura puramente flessionale in quanto gli elementi alla Kirchhoff possono presentare solo deformazioni puramente flessionali. Raggruppando queste funzioni di forma, è possibile rappresentare una deformazione di tipo cubico arbitraria. Lo spostamento normale al piano è una funzione rappresentabile attraverso un polinomio di ordine 3 e, pertanto, un elemento alla Kirchhoff per le piastre (così come un elemento alla Eulero per le travi) riesce a rappresentare in forma esatta, senza necessità di ulteriore discretizzazione un andamento lineare del momento flettente. Di conseguenza, in presenza di una struttura caricata da soli carichi concentrati, il momento flettente è al più lineare in ogni tratto della struttura: pertanto è sufficiente un singolo elemento alla Kirchhoff in caso di piastre (o di un elemento alla Eulero per le travi) in ogni tratto della struttura per ottenere una soluzione esatta.

Viceversa, gli elementi di tipo piastra alla Mindlin non consentono di utilizzare le rotazioni nodali per arricchire il campo degli spostamenti normali al piano: infatti, per tali elementi spostamenti e rotazioni risultano essere indipendenti a causa della presenza del grado di libertà in più rappresentato dalla deformazione tagliante. Consideriamo quindi un elemento piastra alla Mindlin:



gli spostamenti dei nodi paralleli al piano ($\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$) determinano lo stato tensionale membranale; gli spostamenti normali al piano determinano la deformazione tagliante. Considerando la piastra di prima con i nodi 1, 4, 2 e 3 in cui i nodi 1 e 4 si spostano di una certa entità mentre in nodi 2 e 3 rimangono fermi, che dava luogo ad una deformata S nella piastra alla Kirchhoff, per convenzione nella piastra alla Mindlin dà luogo ad una pura deformata tagliante, ovvero si assume che la deformata sia "a mazzo di carte". Pertanto, gli spostamenti normali al piano di piastra vengono interpretati come deformate taglianti che danno origine a delle γ_{zx} e γ_{yz}. Viceversa, delle rotazioni dei nodi 1 e 4 a cui corrispondono delle rotazioni opposte dei noti 2 e 3, danno luogo a una deformazione di tipo trapezio che viene interpretata come l'allungamento delle fibre superiori e accorciamento delle fibre inferiori che corrisponde a una deformazione flessionale.

Quindi, dagli spostamenti si ricavano le deformazioni di taglio e dalle rotazioni le deformazioni flessionali. Il problema è che, non potendo interconnettere spostamenti e rotazioni, posso modellare delle deformazioni di taglio ma non posso più modellare una curvatura lineare (cosa che è consentita dalla funzione cubica degli elementi alla Kirchhoff) ma al più posso modellare uno stato di curvatura costante. Pertanto, un elemento di tipo piastra alla Mindlin coglie la deformazione tagliante ma perde la possibilità di rappresentare in forma esatta delle curvature variabili linearmente, riuscendo a rappresentare unicamente delle curvature uniformi.