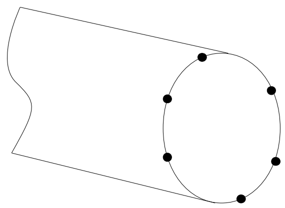
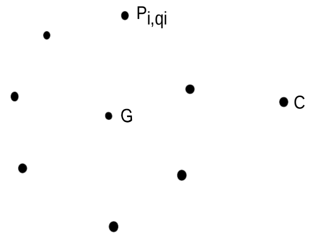
# RBE3

## Indicazioni generali

Si ha una nuvola di punti $P_i$ ognuno con peso $q_i$ che definiscono una distribuzione.
Esempio di questa nuvola potrebbero essere i nodi al terminale di una sezione di un profilato meshato con elementi piastra:






Tutte le volte che si deve distribuire un carico o campionare uno scostamento e una rotazione media per un gruppo di nodi, l'RBE3 è il modello di riferimento, infatti utilizzando l'RBE2 si avrebbe l'effetto collaterale di irrigidire la struttura creando un collegamento rigido tra tutti i nodi del corpo, mentre l'RBE3 concede deformazioni.
La distribuzione di nodi ha un baricentro G (che non è un nodo del modello) necessario per semplificare le relazioni tra nodo C (termine di controllo) definito *nodo di riferimento* o *nodo dipendente* e i nodi della distribuzione.
E' inoltre definito il vincolo cinematico tra C e G: C si muove con moto di corpo rigido rispetto a G (il baricentro è un termine indipendente e C è diventato dipendente).
Come visto precedentemente è sufficiente impostare questi 6 vincoli.

$$\begin{bmatrix} u_C \\ v_C \\ w_C \\ \theta_C \\ \phi_C \\ \psi_C \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & +(z_C - z_G) & -(y_C - y_G) \\ 0 & 1 & 0 & -(z_C - z_G) & 0 & +(x_C - x_G) \\ 0 & 0 & 1 & +(y_C - y_G) & -(x_C - x_G) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{L}}_{CG}} \cdot \begin{bmatrix} u_G \\ v_G \\ w_G \\ \theta_G \\ \phi_G \\ \psi_G \end{bmatrix}$$

u,v,w sono spostamenti su x,y,z.
q,f,y sono rotazioni su x,y,z.

Si può notare che C ruota in maniera solidale a G poiché per il corpo rigido le rotazioni sono uniformi. Essendo collegati rigidamente, ogni azione applicata a C verrà riportata a G a meno delle normali coppie di trasporto.
Gli spostamenti del baricentro seguono gli spostamenti dei nodi della distribuzione con media pesata. Detti $U_i$, $V_i$, $W_i$, gli spostamenti dei nodi $P_i$ rispettivamente su x,y,z:

$$u_G = \frac{\sum_i q_i u_i}{\sum_i q_i}, \quad v_G = \frac{\sum_i q_i v_i}{\sum_i q_i}, \quad w_G = \frac{\sum_i q_i w_i}{\sum_i q_i},$$

Quindi il baricentro si muove di moto medio e il punto che è baricentro sulla indeformata resta baricentro anche sulla deformata.
L'RBE3 può essere utilizzato quindi per monitorare lo spostamento medio dei nodi, in particolare se si fa coincidere C con G risulterà che la reazione di corpo rigido si riduce alla matrice identità.
Se G ruota, C traslerà e in più avrà una componente di rotazione che, se C corrisponde a G posso trascurare, mentre in caso contrario questa componente “sporca” l'idea di analizzare lo spostamento medio.
Se mi trovo in un ristretto sottoinsieme di elementi (come piastre, travi), la rotazione in X di G sarà:

$$\theta_g = \frac{\sum q_i * \theta_i}{\sum q_i}$$

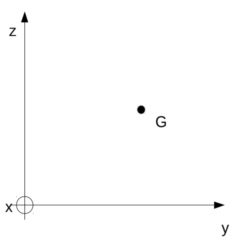
In caso di esaedri di pannelli sandwich, però, non avrei rotazioni e quindi non potrei utilizzare questa espressione.
L'RBE3 è infatti stato creato principalmente per definire distribuzione di coppie su elementi che non portano rotazioni, è quindi necessario analizzare non come gli spostamenti dei nodi Pi vanno definire la rotazione di G ma come un momento applicato al baricentro G va a distribuirsi sulla distribuzione di nodi.

Prendendo un punto baricentrico G analizzo le componenti di coppia che si vengono a creare su esso derivanti dall'applicazione di una forza o coppia C e poi trasferita rigidamente ad esso.

Definito:

| | |
|---|---|
| u= spostamento lungo x ; | U= forza lungo x |
| q= rotazione in x ; | Q= coppia in x |
| f= rotazione in y ; | F= coppia in y |
| y= rotazione in z ; | **Y=** coppia in z |

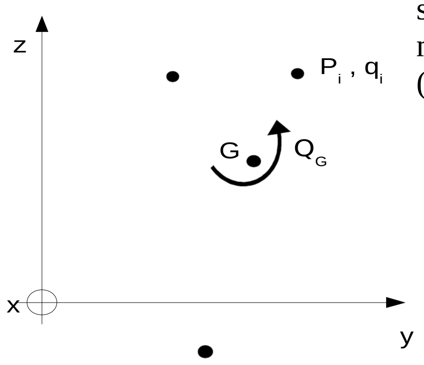
Volendo distribuire la coppia $Q_G$ di G sui nodi, utilizzando la notazione precedente di $Q_G$ non sarebbe possibile poichè non è detto che i nodi considerati definiscono rotazioni. Se i nodi non accettano rotazioni nodali, quella coppia $Q_G$ dovrà essere distribuita sottoforma di forze:



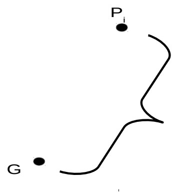
Si suppone inoltre che il sistema di riferimento $Gxyz$ sia **principale d'inerzia** per la distribuzione di pesi; nel caso tale ipotesi non sia verificata occorre procedere come segue:

- cambio di sistema di riferimento da terna $xyz$ ad una terna ausiliaria $\xi\eta\zeta$ con orientazione principale d'inerzia per la specifica distrubuzione RBE3;
- applicazione della procedura sotto descritta utilizzando posizioni nodali e componenti di forza/momento scomposte secondo la terna ausiliaria $\xi\eta\zeta$ in luogo della predefinita $xyz$;
- trasformazione inversa delle quantità risultanti da terna ausiliaria $\xi\eta\zeta$ a terna originale $xyz$.

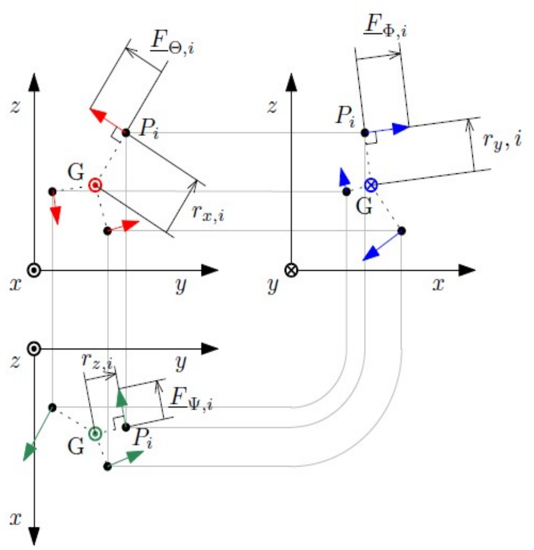
Prendo 3 nodi ognuno con peso $q_i$ , proiettandoli (nel caso non vi fossero già giacenti) sul piano yz del foglio.




La coppia $Q_G$ deve essere ripartita sui nodi sottoforma di forze da descrivere per direzione, modulo e verso. La direzione è tangenziale (ortogonale ai raggi tra nodo $P_i$ e baricentro)




Raggio/distanza proiettata su piano yz associato al nodo i-esimo

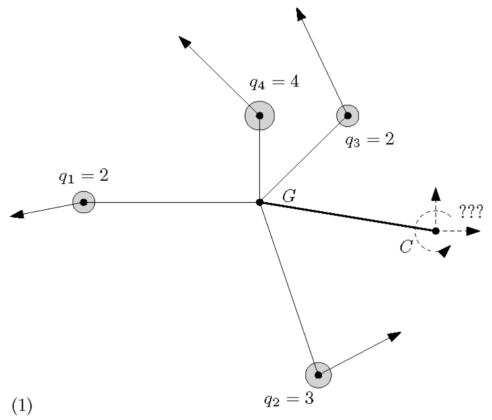



Una volta definito il raggio proiettato, definisco la tangente per la direzione:

Il modulo del vettore forza così trovato sarà :

$$|F_{\theta i}| = \lambda * r_{x,i} * q_i \qquad \forall i$$

Quindi nodi più lontani dal baricentro prenderanno più carico e anche più peso è associato al nodo e più esso sarà caricato. In questo modo ho preso una componente di coppia e l'ho ridotta a delle forze.



(1)

In questo modo I viene definito dalla risultante delle forze U=$Q_G$ , cioè è definito per vincolo di pari coppia per risultante.
Ripeto questo procedimento anche per le componenti $F_G$ e $Y_G$.
Procedo poi con le formule fino ad arrivare al determinante simbolico.

Su ogni nodo $P_i$ agiscono delle forze in componente

- x : $U_i^{II}$ ;
- y : $V_i^{II}$ ;
- z : $W_i^{II}$ ;

Sono definite con apice $^{II}$ per distinguerle dalle forze $U_i^I$ , $V_i^I$ e $W_i^I$ che derivano dalla ripartizione delle forze lungo x,y e z sul baricentro.

$$U_i^I = U_G \frac{q_i}{\sum q_i}$$

Quindi:

- $U^I$ , $V^I$ e $W^I$ sono dovute alla ripartizione delle forze applicate al baricentro;
- $U^{II}$ , $V^{II}$ e $W^{II}$ sono dovute alla ripartizione delle coppie al baricentro.

Forza da un nodo derivante da tutte le componenti di coppia:

$$U_i^{II} * \hat{i} + V_i^{II} * \hat{j} + W_i^{II} * \hat{k} = q_i \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \Delta x_i & \Delta y_i & \Delta z_i \end{vmatrix}$$

Dove i puntini indicano le tre componenti di azione momento al baricentro simil momento di inerzia e i D.. sono gli scostamenti del nodo i-esimo rispetto al baricentro in x, y e z.

$$F_i = \ldots\ldots. \qquad \begin{bmatrix} U_i \\ V_i \\ W_i \end{bmatrix} = q_i \begin{bmatrix} \ldots\ldots\ldots\ldots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_G \\ V_G \\ W_G \\ \Theta_G \\ \Phi_G \\ \Psi_G \end{bmatrix}$$

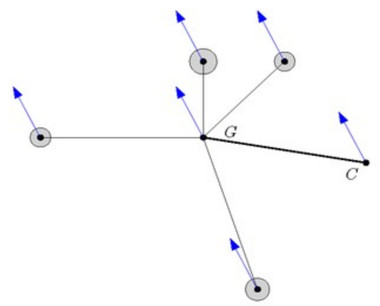
Dove la matrice vuota è la matrice di legame $L_{GP_i}^T$ che definisce la ripartizione delle forze.

Perciò, note le forze al baricentro, se si moltiplica per la matrice $L_{GP_i}^T$ si può distribuire le coppie e le forze sulla nuvola di punti $P_i$ .

Partendo invece dagli spostamenti dei $P_i$ , per trovare gli spostamenti del baricentro G è necessario moltiplicare $L_{GP}$ per il vettore spostamento di tutti i punti.

$$\delta_G = \begin{bmatrix} L_{GP,1} & \ldots\ldots & L_{GP,i} & \ldots\ldots & L_{GP,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ u_2 \\ . \\ . \\ . \\ w_n \end{bmatrix}$$

Esempio grafico per una migliore comprensione del procedimento per arrivare a trovare gli spostamenti del baricentro è il seguente:



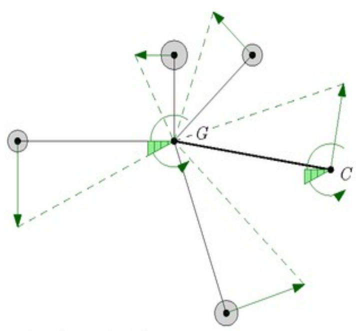

(2a) traslazione

Ognuno dei 4 nodi ha peso differente e la loro traslazione sarà diversa.

Prendo i 4 vettori spostamento e ne faccio la media pesata per poi dividere per la somma dei pesi, quindi trovo la media della traslazione:

$$u_G = \frac{\sum_i q_i \left\langle [1, 0, 0], [u_i, v_i, w_i] \right\rangle}{\sum_i q_i}$$

Se ho solo traslazione e nessuna rotazione, anche G traslerà della stessa entità e quindi anche C traslerà identicamente.

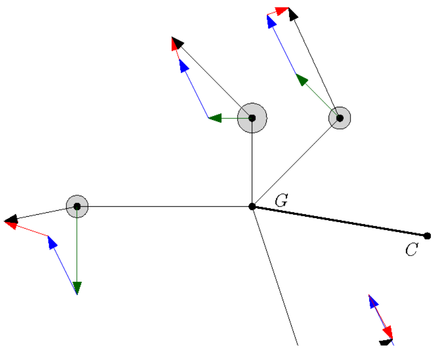



2b) rotazione (linearizzata)

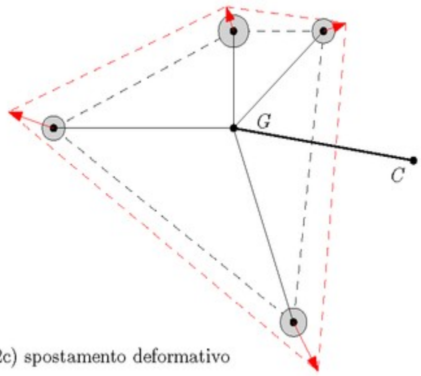
Rotazione dei punti definisce spostamenti che producono rotazione del baricentro in z:

$$\psi_G = \frac{\sum_i q_i \left\langle [-\Delta y_i, +\Delta x_i, 0], [u_i, v_i, w_i] \right\rangle}{\sum_i q_i r_{z,i}^2}$$

cioè il quoziente tra il momento degli spostamenti e un termine normalizzante (cambiando DY, DX e r posso trovare con la stessa formula anche q e f.

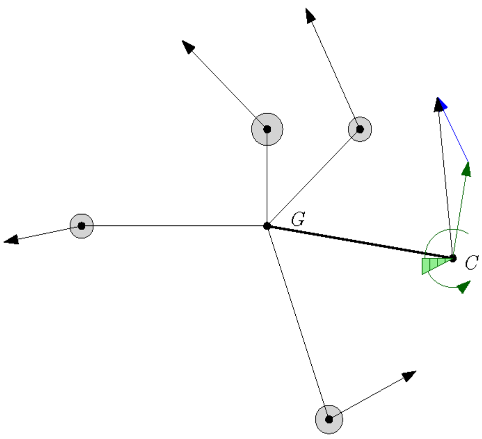



Avendo estratto dal moto dei punti una quotaparte traslazionale e una quotaparte rotazionale è possibile fare la differenza tra spostamento originario e queste due quoteparti per trovare la quotaparte deformativa.




(2c) spostamento deformativo

In media I punti di questa distribuzione tendono ad allontanarsi tra loro.

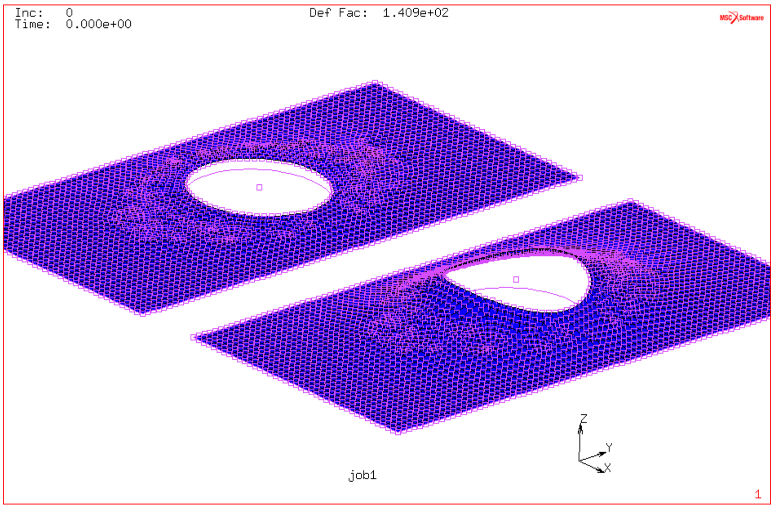


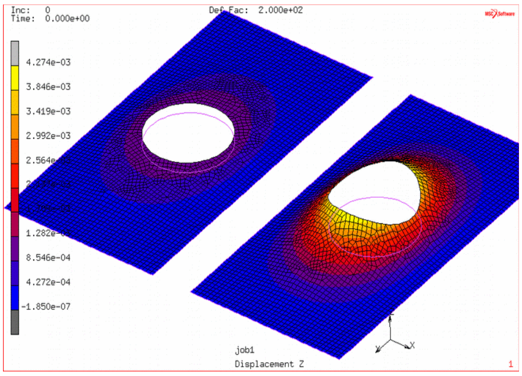

(3)

Il moto di C però non prende componenti deformative ma è definito esclusivamente da una componente di traslazione e da una di rotazione che riceve dal collegamento rigido con il baricentro.
In generale quindi, se si vuole monitorare lo spostamento medio ponderato (poiche dipende dai pesi $q_i$ ) di una distribuzione di nodi si può creare un punto C esterno collegato mediante RBE3 a tutti i nodi e, applicandovi una coppia o forza, è possibile distribuirla su tutta la distribuzione di nodi.

# Confronto fra RBE2 e RBE3

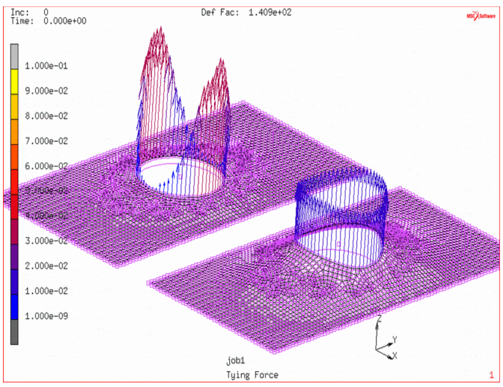
Vediamo come varia il comportamento di due piastre uguali, vincolate nel foro centrale con un RBE2 e un RBE3:




Si può vedere come quella vincolata con RBE3 sia più deformata perchè l'RBE2 può muoversi con moto di pura traslazione e rotazione, mentre gli spostamenti deformativi sono vietati dalla definizione di corpo rigido.

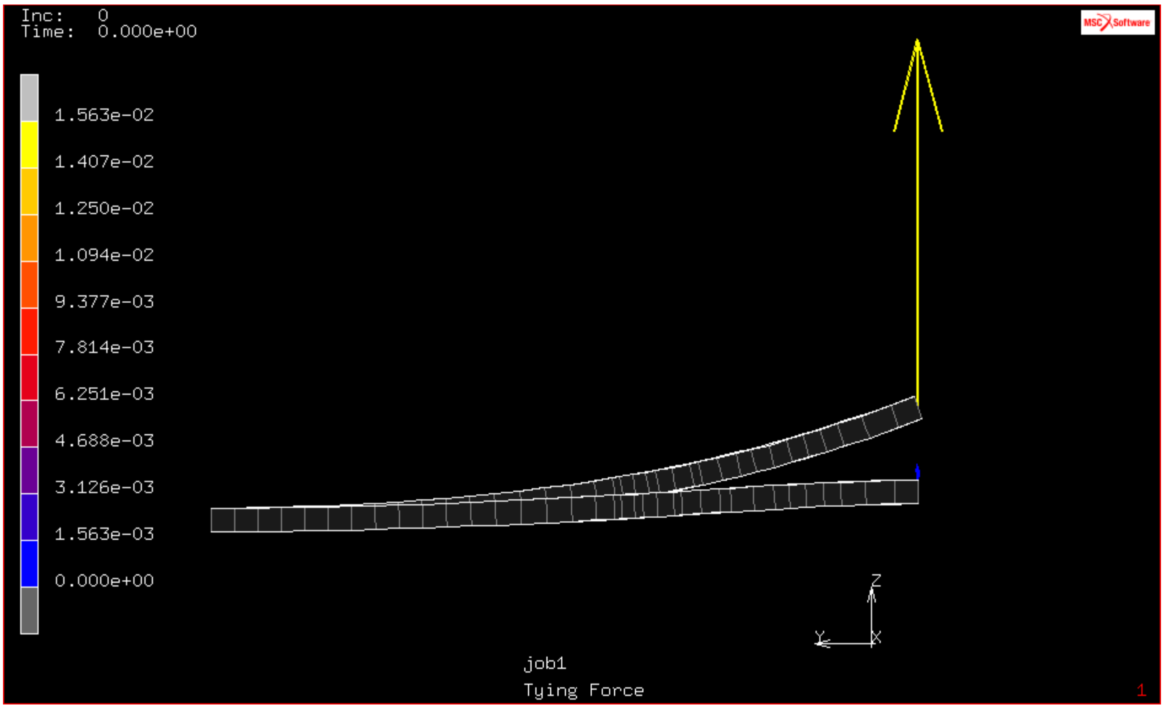
Definite le *tying force* come le forze trasmesse dal vincolo cinematico interno possiamo notare che:




-Caso con RBE3: a parità di pesi assegnati, si ha una distribuzione delle forze uguale su tutti i nodi, allora a parità di forze ho spostamenti diversi.

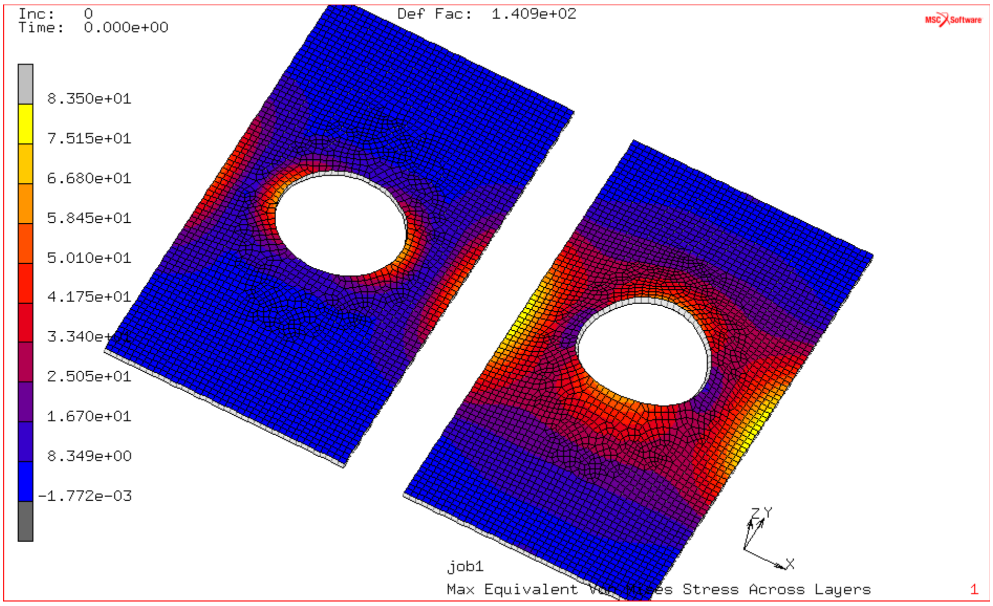
-Caso con RBE2: non potendo deformare il corpo rigido dell'RBE2, devo avere la stessa deformazione su ogni nodo, allora vedrò *tying force* applicate ai nodi controllati dall'RBE2

Consideriamo una sezione della deformata delle due piastre:

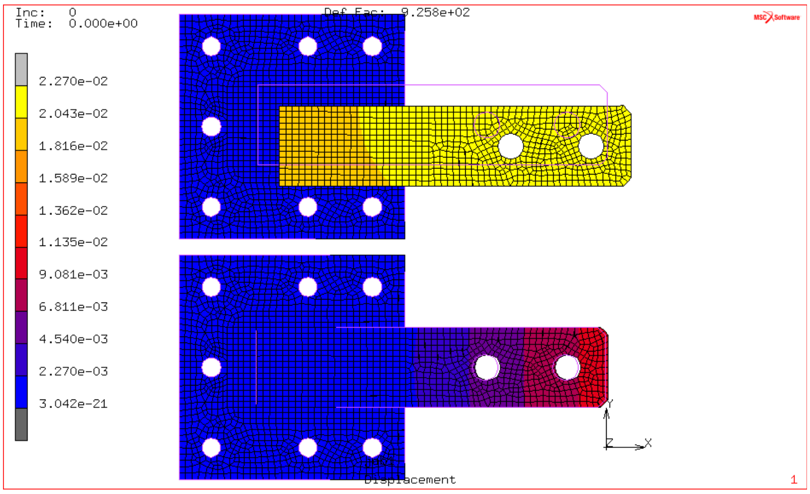



si può spiegare la differenza di tensionamento facendo un'analogia tra le sezioni e delle semplici travi dove la piastra vincolata dall'RBE2 che non può deformare, è vincolata all'estremità da un doppio pendolo che blocca le rotazioni all'estremità, mentre quella vincolata dall'RBE3 ha l'estremità libera.

Con questa analogia si può provare a dare una spiegazione al tensionamento maggiore della piastra con RBE3.



Adesso prendiamo invece l'esempio della flangia con braccio di piatto:




Questa flangia è saldata al piatto e il cordone di saldatura è stato modellato con una serie di RBE2. Questa tecnica è ottima per la modellazione di saldature tra elementi piastra, ma pessima per elementi che non prendono rotazioni come gli HEX_8.
In questo caso infatti non diventa un corpo rigido, ma la struttura può ancora ruotare perchè i nodi dell'HEX_8 non prendono momenti, è come se tutti gli RBE2 fossero delle bielle con cerniere all'estremità.

L'elemento piastra invece ha già dei segmenti sui nodi che prendono rotazioni, allora con l'elemento rigido RBE2 vado a unire I 2 segmenti presenti sui due elementi piastra, ottenendo quindi un'unica piastra di spessore pari alla somma delle due piastre, risultato molto vicino al caso reale di un cordone a saldatura.

Nel caso però in cui i nodi delle due piastre da unire non siano allineati posso proiettare il nodo della piastra 1 sulla piastra 2 poi collegarlo ai 4 nodi intorno con un RBE3 deformabile, altrimenti se usassimo una RBE2 falseremmo i risultati della Von-Mises perchè l'RBE2 infinitamente rigido prenderebbe tutto il carico.
Altro metodo è usare INSERTS, proiettando il nodo e legando il comportamento dei due nodi. Notare il problema del disallineamento guardando lo scorrimento della piastra.

## Autori e carico orario

Ore dedicate alla stesura/revisione degli appunti di questa lezione.

| **Autore/Revisore** | **Prima stesura** | **Revisione** | **Seconda stesura** | **Totale** |
|---|---|---|---|---|
| Davide Conti | 5 | | | |
| Gabriele Amedeo Poli | 5 | | | |
| Alessandro Villa | 5 | | | |
| Revisore 1 | | | | |
| Revisore 2 | | | | |
| Revisore 3 | | | | |
| **Totale** | | | | |